SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA – PIBIC

Cálculo Fracionário e Aplicações.

Equação de Logística Fracionária

Área do conhecimento: Matemática
Subárea do conhecimento: Cálculo Fracionário
Especialidade do conhecimento: Equações Diferenciais Fracionárias

Relatório Final
Período da bolsa: de 09/2021 a 08/2022

Este projeto é desenvolvido com bolsa de iniciação científica

PIBIC/CNPq

Orientador: Arlúcio da Cruz Viana
Autora: Amanda Guimarães Melo

Sumário

1 Introdução **3**

2 Objetivos **4**

3 Metodologia **4**

4 Resultados **5**

5 Discussões **13**

6 Conclusões **14**

7 Perspectivas de Futuros Trabalhos **15**

8 Outras Atividades **15**

Relatório final **16**

Prefácio **17**

1 Preliminares **18**
1.1 Preliminares de Análise Real 18
1.2 Convergência Simples e Uniforme de Sequências de Funções 19
1.3 Integrais a um Parâmetro 21
1.4 Funções Convexas 27

2 Função Gama **34**
2.1 Definição e propriedades 34
2.2 Continuidade 38
2.3 Diferenciabilidade 39
2.4 Convexidade 45
2.5 Monotonicidade 46

3 Função Beta **46**
3.1 Definição e propriedades 46

4 Símbolo de Pochhaammer **50**
4.1 Definição e propriedades 50

5 Função Mittag-Leffler **52**
5.1 Definição e exemplos 52

6 Operadores Fracionários **54**
6.1 Integral Fracionária de Riemann-Liouville 54
6.2 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville 56
6.3 Derivada Fracionária de Caputo 59

7 Estudo do artigo: Uma nota sobre a equação de Logística Fracionária 63
7.1 Equação de Logística Ordinária 63
7.2 Equação de Logística Fracionária 65

Referências Bibliográficas 72

1 Introdução

A equação de logística é uma importante equação diferencial não linear, criada por Pierre François Verhulst, em 1838, com aplicabilidade inicial em modelos populacionais com recursos limitados. Definida por

$$N'(t) = kN(t)(N_{\text{max}} - N(t)),$$

onde $N(t)$ e $N'(t)$ representam, respectivamente, a população total e a taxa de variação do crescimento populacional em um dado instante t, N_{max} é a capacidade de suporte de determinada população, em outros termos, é o número de crescimento máximo de uma população e k é uma constante de proporcionalidade. Tal equação é uma das poucas equações diferenciais não lineares que admite solução explícita, podendo ser obtida pelo método de separação de variáveis:

$$N(t) = \frac{N_{\text{max}}}{1 + \left(\frac{N_{\text{max}} - N_0}{N_0}\right) e^{-kt}}, \quad t \geq 0$$

em que $N(0) = N_0$. A solução acima é conhecida como função de logística, com curva sigmoide (em formato de s). Além de sua aplicação em Ecologia, ela possui muitas outras aplicabilidades. Por exemplo, na medicina ela tem sido usada para modelar crescimento de tumores e aplicada em modelos de crescimento logístico envolvendo dados da COVID-19. Como exemplo dessas aplicações, citamos os artigos (FORYŚ; MARCINIAK-CZOCHRA, 2003) e (SHEN, 2020), o primeiro aborda várias possibilidades de modelagem de crescimento tumoral com base na equação de logística e o segundo examina a aplicabilidade do modelo de crescimento logístico, com implicações para o estudo da pandemia de COVID-19 e outras doenças infecciosas.

O Cálculo Fracionário é o ramo da matemática que estuda integrais e derivadas de ordem arbitrárias. A sua origem se deu a partir da troca de correspondêndias, em 1695, entre os matemáticos Leibniz, o invetor da notação $d^n y/dx^n$, e L'Hôpital. Este questionou a Leibniz sobre a derivada de ordem $n = 1/2$, que respondeu profeticamente que este é um aparente paradoxo do qual, um dia, seriam tiradas consequências úteis. Desde então, vários matemáticos contribuiram para o desenvolvimento do Cálculo Fracionário, dentre eles estão Euler, Laplace, Lacroix, Fourier e Abel. Para mais detalhes sobre a origem do Cálculo Fracionário, consultar (MILLER; ROSS, 1993). Atualmente, o Cálculo Fracionário é uma área em crescimento e vem despertando o interesse de vários pesquisadores. Como exemplo desse crescimneto, citamos o II Simpósio Brasileiro de Cálculo Fracionário, que ocorreu no presente ano e reuniu vários especialistas de diferentes áreas, Física, Engenharia, Medicina, Equações Diferenciais e Análise Aplicada, que apresentaram tópicos importantes de pesquisa atual e problemas em aberto envolvendo o Cálculo Fracionário. Para mais informações sobre esse simpósio, ver (SBMAC, 2022).

A equação de logística fracionária, leva esse nome devido ao uso da derivada fracionária em sua equação, em comparação com a equação de logística. Estudos mostram que a introdução da derivada fracionária em modelos matemáticos trazem resultados mais próximos da realidade. Por exemplo, seguindo uma abordagem fracionária, o artigo (VALENTIM et al., 2020) deriva soluções analíticas para cinco modelos de crescimento tumoral, dentre eles está um modelo logístico fracionário. Em termos de previsão de crescimento tumoral, os resultados desse artigo indicam que os modelos fracionários não apenas apresentam melhor desempenho, mas também revelam características interessantes a serem exploradas.

Tendo em vista a importância da equação de logística fracionária, nos sentimos motivados a estudá-la. Neste trabalho, estudamos e fizemos a análise detalhada dos argumentos matemáticos do artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), artigo principal do objetivo da Iniciação Científica, com o intuito de provar a falibilidade da conjectura de (WEST, 2015) para a equação de logística fracionária. A equação de logística fracionária abordada por (AREA; LOSADA; NIETO, 2016) envolve a derivada de Caputo e é definida por:

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = k^{\alpha}u(t)(1-u(t)), \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

com $u(t) = N(t)/N_{\text{max}}$.

Visando argumentar formalmente cada etapa do artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), trouxemos um estudo sobre resultados básicos da convergência uniforme de sequências de funções, integrais a um parâmetro e funções convexas, com base em (LIMA, 2014b), (ARTIN, 1964), (EIDAM, 2020) e (OLIVEIRA, 2015) e, com esses resultados, demonstramos propriedades da Função Gama de Euler, continuidade, diferenciabilidade, convexidade e monotonicidade. Além da Função Gama, estudamos, com menor ênfase, as funções Beta de Euler, o símbolo de Pochhaammer e a função de Mittag-Leffler. Por fim, trouxemos um estudo sobre os elementos básicos do Cálculo Fracionário com o auxílio de (CARDOSO, 2017-2018).

2 Objetivos

Estudar e se familiarizar com os elementos básicos do Cálculo Fracionário por meio de (CARDOSO, 2017-2018). Ademais, conhecer as propriedades da Função Gama, continuidade, diferenciabilidade, convexidade e monotonicidade. Ainda, estudar a equação de logística fracionária e entender as motivações do uso da derivada fracionária na equação de logística. Especialmente, desejamos utilizar o conhecimento obtido para analisar os argumentos de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016) para mostrar a falha da conjectura de (WEST, 2015).

3 Metodologia

A metodologia, do ponto de vista operacional, consistiu no desenvolvimento teórico com auxílio de bibliografia relevante da Análise Matemática e do Cálculo Fracionário. Através de reuniões semanais com o orientador, presencialmente ou remotamente, fizemos o aferição da evolução da estudante e os ajustes necessários na direção do objetivo do Plano de Trabalho.

Do ponto de vista matemático, a estudante buscou se familiarizar com os elementos básicos do Cálculo Fracionário através de (CARDOSO, 2017-2018). Ao atacar o artigo principal do objetivo da Iniciação Científica, (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), se deparou com a necessidade de conhecer propriedades da

Função Gama, o que acarretou em um estudo dos resultados básicos da convergência uniforme de sequências de funções, integrais a um parâmetro e funções convexas. Para mostrar a falibilidade da conjectura de (WEST, 2015), seguimos o caminho de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), escrevendo a função de Mittag-Leffler como uma série e derivando, dentro do que a teoria de funções analíticas nos permite. Neste ponto, fizemos a análise detalhada dos argumentos matemáticos do último artigo.

4 Resultados

Analisamos os argumentos de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016) para mostrar a falha da conjectura de (WEST, 2015). Essa conjectura sugere que a equação de logística fracionária

$$ {}^{C}D^{\alpha}u(t) = k^{\alpha}u(t)(1-u(t)), \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{4.1}$$

pode ter uma solução explícita com a forma

$$ u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n} E_{\alpha}(-nk^{\alpha}t^{\alpha})\right], \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

Se $\alpha = 1$ em (4.2) e $\left|\frac{u_0-1}{u_0e^{nkt}}\right| < 1$, (4.2) é solução de (4.1), pois

$$ u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n} E_{1}(-nkt)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n} e^{-nkt} \overset{j=n+1}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0e^{kt}}\right)^{j-1}$$

$$ \Rightarrow u(t) = \frac{1}{1-\frac{u_0-1}{u_0e^{kt}}} = \frac{u_0e^{kt}}{u_0e^{kt}-(u_0-1)} = \frac{u_0}{u_0+(1-u_0)e^{-kt}}.$$

Isto é, (4.2) coincide com a solução clássica da equação de logística ordinária.

O objetivo do artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016) é mostrar, por meio de uma prova por contradição, que a função (4.2) não é uma solução exata para a equação (4.1). Para isso, (AREA; LOSADA; NIETO, 2016) supõe que (4.2) é uma solução para (4.1) e, por meio de argumentos baseados no Cálculo Fracionário e em propriedades da função de Mittag-Leffler e da função Gama de Euler, conclui que $\alpha = 1$, contradizendo a hipótese de que $0 < \alpha < 1$.

A proposição a seguir é relativa a Proposição 2.3 do artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016).

Proposição 4.1. *Seja* $0 < \alpha < 1$. *A identidade*

$$ E_{\alpha}(-2k^{\alpha}t^{\alpha}) = E_{\alpha}(-k^{\alpha}t^{\alpha})E_{\alpha}(-k^{\alpha}t^{\alpha}) \tag{4.3}$$

é válida se e somente se $\alpha = 1$.

Em sua prova, detectamos um erro na demonstração da implicação:

$$ \boxed{\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1.}$$

Para a sua prova, Area, Losada e Nieto (2016) segue o seguinte raciocínio: se $0 < \alpha < 1$, então

$$\Gamma(2\alpha+1) < \Gamma(3) = 2 \text{ e } 4\Gamma(\alpha+1)^2 > 4\Gamma(1)^2 = 4.$$

Ou seja,

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

A partir daí concluem que $\alpha = 1$. No entanto, há um equívoco na afirmação: se $0 < \alpha < 1$, então

$$4\Gamma(\alpha+1)^2 > 4\Gamma(1)^2 = 4. \tag{4.4}$$

Para argumentar matemáticamente esse equívoco, houve a necessidade de conhecermos o comportamento da função Gama de Euler, para isso mostramos o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Seja $z > 0$. A função Γ é contínua, diferenciável com*

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt$$

estritamente crescente. Além disso, Γ é estritamente convexa. Com esses resultados, pode-se concluir que existe $x_0 \in (1,2)$ ponto crítico de Γ, tal que:

- $x > x_0 \Rightarrow \Gamma$ *é crescente;*
- $x < x_0 \Rightarrow \Gamma$ *decrescente.*

Demonstração. Faremos uma breve discussão das ferramentas utilizadas para demonstrar esse teorema. Para maiores detalhes, ver a Seção 2 do texto em anexo.

Tanto para a continuidade como para a diferenciabilidade, dividimos a prova em dois casos: $z > 1$ e $z \in (0, 1]$. No caso $z > 1$, para a continuidade, utilizamos o Teorema 2 do capítulo 7 de (LIMA, 2014b), para garantir que, mostrando que dado uma sequência $x_n > 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \Gamma(x_0),$$

temos a continuidade da função Gama. Para a diferenciabilidade, utilizamos o teorema a seguir, referente ao Teorema 1.9 do texto em anexo, uma versão modificada do Teorema 7 de (OLIVEIRA, 2015).

Teorema 4.2. *Seja $x_0 > 1$. Considere $f : (1,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, com f_x contínua em $(1,\infty) \times [0,\infty)$. Também, suponha que para cada $x > 1$, as funções $y \longmapsto f(x,y)$ e $y \longmapsto f_x(x,y)$ são integráveis. Ou seja, as integrais a um parâmetro*

$$g(x) = \int_0^\infty f_x(x,y)dy$$

e

$$G(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$$

convergem para todo $x \in (1, \infty)$. Além disso, suponha que g converge uniformemente em intervalos compactos de $(1, \infty)$ contendo x_0, digamos $[a, b]$. Então, G é derivável em $[a, b]$ e

$$G'(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstração. Ver o Teorema 1.11 do texto em anexo. □

Para o caso $z \in (0, 1]$, aplicamos a Propriedade 4.1 da Função Gama, (enunciada mais adiante nesta seção) para escrever

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad z > 0.$$

Aplicamos os resultados anteriores para $\Gamma(z+1)$ e concluímos a continuidade e a diferenciabilidade da função Gama. Para obter, neste caso, a expressão para a derivada, utilizamos integração por partes na identidade anterior.

Com a expressão para a derivada, mostramos que ela é estritamente crescente. Daí, para demonstrar que a função Gama é estritamente convexa, utilizamos a Proposiçaõ 1.4 do texto em anexo, que garante que "Γ' estritamente crescente $\Rightarrow \Gamma$ estritamente convexa".

Os resultados acima foram de suma importância para concluir a monotonicidade da função Gama. Usamos o Teorema de Rolle para mostrar a existência de $x_0 \in (1, 2)$ tal que $\Gamma'(x_0) = 0$. Ainda, pelo Corolário 1 do capítulo 9 de (LIMA, 2014b), que afirma que todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto, concluímos que x_0 é ponto de mínimo absoluto. Assim, pela próxima proposição, relativa a Proposição 1.8 do texto em anexo, conluímos a estudo da monotonicidade da função Gama.

Proposição 4.2. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa. Se $x_0 \in I$ é um ponto de mínimo absoluto, então para $x > x_0$ a função f é crescente. Por outro lado, para $x < x_0$, f é decrescente.*

Demonstração. Consultar a Proposição 1.8 do texto em anexo.

□

Com o resultado anterior, pudemos argumentar que a desigualdade (4.4) não é verdadeira se $0 < \alpha < 1$, tendo em vista que

$$\alpha \in (0, 1) \Rightarrow 1 < \alpha + 1 < 2.$$

Além disso, pelo Teorema 4.1, existe $x_0 \in (1, 2)$, tal que Γ é crescente a direita de x_0 e descrescente a esquerda de x_0. Assim,

$$x_0 \in (1, \alpha+1), x_0 \in (\alpha+1, 2) \text{ ou } x_0 = \alpha + 1 \in (1, 2).$$

Donde segue que,

- $x_0 \in (1, \alpha+1)$:
$$\begin{aligned} & x_0 < \alpha + 1 < 2 \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < \Gamma(2) \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < 1 \end{aligned}$$
- $x_0 \in (\alpha+1, 2)$:
$$\begin{aligned} & 1 < \alpha + 1 < x_0 \\ \Rightarrow\ & \Gamma(1) > \Gamma(\alpha+1) \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < 1 \end{aligned}$$
- $x_0 = \alpha + 1 \in (1, 2)$:
$$\begin{aligned} & \alpha + 1 < 2 \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < \Gamma(2) \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < 1 \end{aligned}$$

Portanto, dos itens acima podemos concluir que

$$\Gamma(\alpha+1) < 1 \Rightarrow 4\Gamma(\alpha+1)^2 < 4. \tag{4.5}$$

Corrigimos essa demonstração utilizando as seguintes propriedades das funções Gama e Beta:

Propriedade 4.1. *Para todo $z > 0$ é verdade que*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Demonstração. Ver a Propriedade 2.1 do Anexo Relatório Final. □

Propriedade 4.2. *Para $x, y > 0$, valem*

$$B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y) \quad \text{e} \quad B(x,y+1) = \left(\frac{y}{x+y}\right) B(x,y).$$

Demonstração. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y) &\Leftrightarrow (x+y)B(x+1,y) = xB(x,y) \\ &\Leftrightarrow x\left(B(x+1,y) - B(x,y)\right) = -yB(x+1,y) \end{aligned}$$

Como, pela Propriedade 3.1 do texto em anexo, $B(x+1,y) - B(x,y) = -B(x,y+1)$, segue

$$\begin{aligned} B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y) &\Leftrightarrow x\left(B(x+1,y) - B(x,y)\right) = -yB(x+1,y) \\ &\Leftrightarrow -xB(x,y+1) = -yB(x+1,y) \\ &\Leftrightarrow xB(x,y+1) = yB(x+1,y). \end{aligned}$$

Além disso, note que, considerando a substituição

$$\begin{aligned} u &= s^y & dv &= x(1-s)^{x-1}ds \\ du &= ys^{y-1}ds & v &= -(1-s)^x, \end{aligned}$$

por integração por partes,

$$\begin{aligned} xB(x,y+1) &= \int_0^1 x(1-s)^{x-1}s^y ds \\ &= -s^y(1-s)^x\Big|_0^1 + y\int_0^1 (1-s)^x s^{y-1} ds \\ &= 0 + yB(x+1,y). \end{aligned}$$

Logo, $xB(x,y+1) = yB(x+1,y)$. Portanto, por equivalências, vale a igualdade

$$B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y).$$

De modo análogo, mostra-se que

$$B(x,y+1) = \left(\frac{y}{x+y}\right) B(x,y).$$

□

A seguir segue a nova demonstração da Proposição 4.1.

Demonstração. Pela definição da função de Mittag-Leffler,

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\right). \tag{4.7}$$

Lembrando que, dados as séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$, o produto de Cauchy dessas séries é definido como

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n, \quad \text{com } e_n = \sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j}. \tag{4.8}$$

Segue que, pela definição acima,

$$\begin{aligned}
E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+1)} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^{n-j}}{\Gamma((n-j)\alpha+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-k^\alpha t^\alpha)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-n}}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Então, podemos reescrever (4.7) como

$$E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n b_n \tag{4.9}$$

onde

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-n}}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)}. \tag{4.10}$$

Sendo assim, de (4.6) e (4.9), segue que

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n b_n, \tag{4.11}$$

com b_n dado em (4.10).

Vamos mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2k^{\alpha}t^{\alpha})^n}{\Gamma(n\alpha+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2k^{\alpha}t^{\alpha})^n b_n \Leftrightarrow \alpha=1$$

e concluiremos que a identidade (4.3) é válida se e somente se $\alpha = 1$. Com efeito,

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2k^{\alpha}t^{\alpha})^n}{\Gamma(n\alpha+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2k^{\alpha}t^{\alpha})^n b_n,$$

com b_n dado em (4.10). Então, por igualdade de séries de potências, os coeficientes das séries acima devem ser iguais, isto é,

$$b_n=\frac{1}{\Gamma(n\alpha+1)}. \tag{4.12}$$

Em particular, para o caso $n=2$, devemos ter que

$$b_2=\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

Observando que,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2}\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((2-j)\alpha+1)}\\
=\ &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(1)}\right)\\
=\ &\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\right),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\right)&=\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}\\
\Rightarrow \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2}&=\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Afirmamos que se a igualdade (4.13) é válida então $\alpha=1$. Com efeito, de (4.13) e pela Propriedade 4.1, temos as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2}=\frac{1}{2} \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{2\alpha\Gamma(2\alpha)}{4\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}=1\\
&\Leftrightarrow\quad \Gamma(2\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Suponha que $\Gamma(2\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)$ e $\alpha\in(0,1)$. Note que, pelas propriedades 4.1 e 4.2, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1) &= \Gamma(2\alpha+1)B(\alpha,\alpha+1)\\ &= 2\alpha\Gamma(2\alpha)\left(\frac{\alpha}{2\alpha}B(\alpha,\alpha)\right)\\ &= \alpha\Gamma(2\alpha)B(\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

Logo, de (4.14), chegamos que

$$\alpha B(\alpha,\alpha)=1. \tag{4.15}$$

No entanto, $\alpha B(\alpha,\alpha)>1$. De fato, veja que

$$0<\alpha<1\Rightarrow -1<\alpha-1<0$$

e

$$0<s<1\Rightarrow -1<-s<0\Rightarrow 0<1-s<1$$

Ainda,

$$-1<\alpha-1<0 \quad \text{e} \quad 0<1-s<1$$
$$\Rightarrow (1-s)^{\alpha-1}>(1-s)^0=1.$$

Daí, como $s^{\alpha-1}>0$, temos

$$\alpha s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}>\alpha s^{\alpha-1}.$$

Logo,

$$\alpha B(\alpha,\alpha)=\alpha\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}ds>\alpha\int_0^1 s^{\alpha-1}ds=1.$$
$$\Rightarrow \alpha B(\alpha,\alpha)>1.$$

Contradição! Pois, por (4.15), $\alpha B(\alpha,\alpha)=1$. Portanto, se a identidade (4.3) é válida, então $\alpha=1$.

$(\Leftarrow)$ Supondo $\alpha=1$, vamos mostrar que

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha)=E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha).$$

Vimos que, para $\alpha=1$, a função de Mittag-Leffler coincide com a função exponencial. Assim,

$$e^{-2kt}=e^{-kt}e^{-kt}\Rightarrow E_1(-2kt)=E_1(-kt)E_1(-kt).$$

□

O Lema abaixo é referente ao Lema 2.1 de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016).

Lema 4.1. *Se a função dada por* (7.4) *é uma solução exata da equação de logística fracionária* (7.1) *de ordem* α; $0<\alpha<1$*, então para todo* $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *temos que*

$$(n+1)E_\alpha(-nk^\alpha s^\alpha)=\sum_{j=0}^{n}E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha). \tag{4.16}$$

Na demonstração do Lema acima, Area, Losada e Nieto (2016) afirmam que da seguinte igualdade

$$-k^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n nE_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) =$$

$$k^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n \left(E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) - \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha) E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)\right),$$

pode-se concluir que

$$(n+1)E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) = \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha) E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha).$$

Mas, em geral, essa conclusão não é válida, por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{6 \cdot 2^n} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{4.17}$$

No entanto, os termos gerais dessas séries são distintos.

Esse resultado seria verdadeiro se pudéssemos aplicar os teoremas de igualdades de séries de potências. No entanto, para usá-los, deve-se supor que a igualdade vale, para todo u_0 em algum intervalo. Porém a condição inicial está fixa e isso nos dá a igualdade de uma série numérica, onde a implicação não vale. De fato, se, por exemplo, tomamos $u_0 = 2$ e as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por $a_0 = 1, a_1 = 2, b_0 = 2, b_1 = 0,$ e $a_n = b_n = 1,$ para $n \geq 2$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n b_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ou seja, a implicação

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)^n b_n \Rightarrow a_n = b_n.$$

falha. Visto que, a primeira igualdade vale sem que a segunda seja verdadeira.

Uma solução seria considerar $u_0 \mapsto u(u_0, t)$, dada pela série (4.2), analítica na primeira variável em um intervalo J em $(1, \infty)$. Desse modo, estaríamos considerando $u_0 > 1$ como uma variável. Assim, ao invés de supor, por contradição, que para u_0, condição inicial fixa, (4.2) é solução de (4.1), supomos, por contradição, que para u_0 variando em J, (4.2) é solução de (4.1). Negando essa afirmação, o resultado do artigo seria:

Teorema 4.3. *Dado $u_0 > 1$, considere um intervalo $J \subset (1, \infty)$, contendo u_0, para o qual a aplicação $u_0 \mapsto u(u_0, t)$, dada pela série* (4.2)*, é analítica na primeira variável. Então, nem toda solução de* (4.1) *com condição inicial em J é da forma* (4.2)*. Ou seja, existe $\bar{u}_0 \in J$, tal que* (4.2) *não é solução de* (4.1) *com condição inicial em $\bar{u}_0$.*

5 Discussões

A motivação para o estudo do comportamento da função Gama surgiu ao atacarmos o artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), de modo mais preciso, a prova da Proposição 2.3. Além desse estudo, mostramos no texto em anexo, com formalidade matemática, o Teorema 1.5 de (ARTIN, 1964), que traz uma caracterização de funções contínuas e convexas, que nos possibilitou mostrarmos a convexidade da função Gama. Nos motivamos a demonstrá-lo devido a escassez de material escrito que contenha a prova dessa caracterização, bem como a justificativa de seus pré-requisitos, a Indução de Cauchy e a generalização da desigualdade

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

No tocante ao artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), detectamos que houve uma falha na demonstração da Proposição 2.3. Mais precisamente, esse equívoco está na seguinte afirmação: se $0 < \alpha < 1$, então

$$4\Gamma(\alpha+1)^2 > 4\Gamma(1)^2 = 4.$$

Neste ponto, o estudo da monotonicidade da função Gama foi essencial para argumentarmos, com formalidade matemática, que a afirmação correta seria: se $0 < \alpha < 1$, então

$$4\Gamma(\alpha+1)^2 < 4\Gamma(1)^2 = 4,$$

com a desigualdade invertida. Corrigimos essa demonstração utilizando as Propriedades 4.1 e 4.2 das funções Gama e Beta, respectivamente. Para tal finalidade, percebemos que, se $0 < \alpha < 1$ e a igualdade

$$\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

é válida, então $\alpha B(\alpha,\alpha) = 1$. Uma contradição, uma vez que, para $\alpha \in (0,1)$, temos que $\alpha B(\alpha,\alpha) > 1$.

Sobre o Lema 2.1 do mesmo artigo, vimos na seção anterior, por meio de um exemplo, que a conclusão

$$\begin{cases} -k^\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n nE_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) = \\ k^\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n \left(E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) - \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)\right) \\ \Rightarrow (n+1)E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha) \end{cases} \tag{5.1}$$

não é válida se considerarmos a condição inicial u_0 fixa. No entanto, tal argumentação pode ser justificada, se considerarmos $u_0 \mapsto u(u_0,t)$, dada pela série (4.2), analítica na primeira variável em um intervalo J em $(1,\infty)$. Ou seja, agora $u_0 > 1$ é uma variável e conseguimos usar os teoremas sobre igualdade de séries de potências. Mas fazendo isso o resultado principal do artigo deixaria de ser "para qualquer condição inicial u_0 fixa, (4.2) não é solução de (4.1)"

e passaria a ser o Teorema 4.3.

Talvez poderíamos concluir do resultado acima que

"toda solução de (4.1) com condição inicial em J não é da forma (4.2)".

Para prová-lo, pensamos no seguinte raciocínio, ainda sem conclusão. Suponha, por contradição, que existe $u_0^* \in J$, tal que (4.1) com condição inicial em u_0^* é da forma (4.2). Defina o conjunto

$$J' = \{\bar{u}_0 > 1/\text{(4.2) não é solução de (4.1) com condição inicial em } \bar{u}_0\}.$$

Afirmamos que J' é denso em J. De fato, dado $u_0' > 1$ em J, existe $J_{u_0'} \subset (1, \infty)$, contendo u_0', para o qual $u_0' \mapsto u(u_0', t)$, dada pela série (4.2), é analítica na primeira variável mas, existe $\bar{u}_0 \in J_{u_0'}$, tal que (4.2) não é solução de (4.1) com condição inicial em $\bar{u}_0$, ou seja, $\bar{u}_0 \in J'$. De outra forma, dado $u_0' \in J$, existe uma vizinhança $J_{u_0'}$ de u_0' tal que $J_{u_0'} \cap J' \neq \emptyset$.

6 Conclusões

Estudamos e nos familiarizamos com os elementos básicos do Cálculo Fracionário. Também, trouxemos um estudo sobre convergência pontual e uniforme de sequências de funções, integrais a um parâmetro e funções convexas. Além disso, estudamos as funções Gama e Beta de Euler e a função de Mittag Leffler, funções essenciais no estudo do Cálculo Fracioário. Ainda, provamos que a função Gama de Euler é contínua, diferenciável, convexa e estudamos a sua monotonicidade.

Entendemos que a motivação para a introdução da derivada fracionária na equação de logística, surgiu devido ao fato de que estudos mostram que a introdução da derivada fracionária em modelos matemáticos trazem resultados melhores e mais aproximados da realidade.

Com respeito ao artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), expomos, detalhamos e analisamos os seus resultados e as suas respectivas demonstrações. Notamos, mediante ao estudo da monotonicidade da função Gama de Euler, que houve uma falha na prova da Proposição 2.3, na afirmação: se $0 < \alpha < 1$, então

$$4\Gamma(\alpha + 1)^2 > 4\Gamma(1)^2 = 4.$$

Corrigimos essa demonstração fazendo o uso das Propriedades 4.1 e 4.2 das funções Gama e Beta, respectivamente. Com relação ao Lema 2.1 do mesmo artigo, observamos, por meio do exemplo visto em (4.17), que a conclusão (5.1) não é válida em geral. Ademais, vimos que para u_0 condição inicial fixa, a conclusão (5.1) também não é válida, pois neste caso teríamos uma série numérica, onde a implicação não vale. Para ver isso, demos um exemplo considerando $u_0 = 2$ e as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por $a_0 = 1, a_1 = 2, b_0 = 2, b_1 = 0,$ e $a_n = b_n = 1,$ para $n \geq 2$. Por fim, argumentamos que, considerando $u_0 \mapsto u(u_0, t)$, dada pela série (4.2), analítica na primeira variável em um intervalo J em $(1, \infty)$, é possível utilizar os teoremas de igualdade de séries de potências. Mas o resultado geral do artigo enfraquece, visto que deixa de ser "para qualquer condição inicial u_0 fixa, (4.2) não é solução de (4.1)"

e passa a ser o Teorema 4.3. Trouxemos uma discussão sobre a possibilidade de mostrar o resultado principal do artigo a partir do Teorema 4.3.

7 Perspectivas de Futuros Trabalhos

Escrever um artigo sobre a análise da monotonicidade da função Gama de Euler para a Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática.

8 Outras Atividades

Como outras atividades, a aluna cadastrada neste plano de trabalho participou do II Simpósio Brasileiro de Cálculo Fracionário nos dias 17/01/2022-21/01/2022. Neste evento, participou dos minicursos:

- Introdução ao Cálculo Fracionário– Prof. Dra. Stefânia Jarosz;
- Cálculo fracionário de variações e controle ótimo– Prof. Gastão Frederico.

Ainda nesse evento, assistiu várias apresentações que abrangeram o Cálculo Fracionário. Dentre as quais destacamos a apresentação "Fractional Logistic Equation Apllied to COVID-19 Data in Brazil – Anne Karoline Feitoza Mendonça", a qual abordou a equação tema do nosso plano de trabalho.

Também, assistiu a palestra:

- About some probabilistic properties of a non local in time telegraph equation – Prof. Francisco Alegría, do ciclo de palestras do Promat, DMA-UFS, no dia 29/10/2021.

Anexo

Relatório Final

Prefácio

O objetivo principal do presente texto é aplicar conceitos básicos do Cálculo Fracionário bem como utilizar propriedades das funções Gama e Beta de Euler e da função de Mittag-Leffler, para mostrar a falibilidade da conjectura de West (2015) seguindo o caminho de Area, Losada e Nieto (2016).

Incialmente, apresentamos um estudo prévio, com o auxílio de bibliografia relevante da Análise Matemática, a respeito dos seguintes tópicos: convergência pontual e uniforme de sequências de funções, integrais a um parâmetro e funções convexas. Seguidamente, explanamos as funções Gama e Beta de Euler e a função de Mittag-Leffler, dando maior ênfase as propriedades da função Gama de Euler, continuidade, diferenciabilidade, convexidade e monotonicidade. Posteriormente, com o auxílio de (CARDOSO, 2017-2018), trazemos um estudo sobre conceitos básicos do Cálculo Fracionário, mais precisamente, abordamos os operadores fracionários de Riemann-Liouville e de Caputo.

1 Preliminares

Nesta seção, com o auxílio de (LIMA, 2014b), (OLIVEIRA, 2015), (EIDAM, 2020) e (ARTIN, 1964), abordamos alguns tópicos introdutórios e primordiais para o seguimento das seções subsequentes. De início, evidenciamos que as demonstrações dos resultados encontrados em (LIMA, 2014b), foram deixadas apenas a indicação de onde encontrá-las, pois é uma referência bastante utilizada nos cursos de Análise Real. Já os resultados que foram abordados utilizando como referência (OLIVEIRA, 2015), (EIDAM, 2020) e (ARTIN, 1964), foram devidamente provados de maneira detalhada.

Em relação ao conteúdo das subseções, preliminarmente, reunimos alguns resultados de Análise Real utilizados ao longo do texto. Depois, abordamos resultados básicos de convergência simples e uniforme de sequências de funções. Em seguida, discorremos sobre integrais a um parâmetro, abordando a definição de convergência uniforme de uma integral a um parâmetro em um dado intervalo e teoremas que trazem condições suficientes para que uma integral dependendo de um parâmetro seja contínua e de classe C^1. Por último, tratamos de conceitos e resultados básicos de funções convexas, incluindo uma caracterização de funções contínuas e convexas.

1.1 Preliminares de Análise Real

A seguir enunciamos alguns resultados, encontrados em (LIMA, 2014b) e (LIMA, 2014a), que serão utilizados nas próximas seções.

Teorema 1.1. *Toda aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida num conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Consultar o Teorema 22 do capítulo 1 de (LIMA, 2014a). □

O próximo Teorema afirma que toda função contínua deifnida em um compacto admite valores máximos e mínimos.

Teorema 1.2 (Teorema de Weierstrass)**.** *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existrm $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Ver Teorema 6 do capítulo 7 de (LIMA, 2014b). □

O Teorema a seguir vai ser útil na conclusão da monotonicidade da Função Gama.

Teorema 1.3 (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Ver Teorema 6 do capítulo 8 de (LIMA, 2014b). □

O Teorema de Rolle é um caso particular do próximo Teorema.

Teorema 1.4 (Teorema do Valor Médio de Lagrange)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.*

Demonstração. Consultar o Teorema 7 do capítulo 8 de (LIMA, 2014b). □

Os limites do Lema a seguir serão utilizados de forma recorrente nas próximas seções.

Lema 1.1. *Para* $a > 0$*,*

$$\lim_{t\to 0} t^a \ln(t) = 0 \quad \textit{e} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^t} = 0.$$

Demonstração. De fato,

$$\lim_{t\to 0} t^a \ln(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t)}{t^{-a}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{-1}}{-at^{-(a+1)}} = -\frac{1}{a} \lim_{t\to 0} t^a = 0.$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^a}{e^t} = 0,$$

pois dado $a \in \mathbb{R}_+^*$, existe $k_a \in \mathbb{N}$, tal que $k_a \geq a$. Assim, para t suficientemente grande,

$$0 \leq \frac{t^a}{e^t} \leq \frac{t^{k_a}}{e^t},$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{k_a}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{k_a!}{e^t} = 0.$$

□

A seguir definimos o Produto de Cauchy de duas séries.

Definição 1.1 (Produto de Cauchy)**.** *Dadas as séries* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$*, o produto de Cauchy dessas séries é definido como*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n, \quad \textit{com } e_n = \sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j}. \tag{1.1}$$

1.2 Convergência Simples e Uniforme de Sequências de Funções

Abaixo definimos convergência simples e convergência uniforme de sequência de funções. Essas definições são encontradas em (LIMA, 2014b).

Definição 1.2. *Uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *converge simplesmente (ou pontualmente) para a função* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando, dados* $\epsilon > 0$ *e* $x \in X$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(dependendo de* ϵ *e de* x*) tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Definição 1.3. *Uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para a função* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(dependendo apenas de* ϵ*) tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \textit{seja qual for } x \in X.$$

No teorema a seguir temos uma caracterização de continuidade envolvendo sequências.

Teorema 1.5. *A fim de que a função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, se tenha $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Demonstração. Consultar o Teorema 2 do capítulo 7 de (LIMA, 2014b). □

A seguir enunciamos dois teoremas clássicos na Análise Real, a respeito de convergência uniforme de funções.

Teorema 1.6. *Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Consultar o Teorema 1 do capítulo 12 de (LIMA, 2014b). □

Teorema 1.7 (Passagem ao limite sob o sinal da integral)**.** *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

De outra forma:

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

se a convergência for uniforme.

Demonstração. Consultar o Teorema 3 do capítulo 12 de (LIMA, 2014b). □

Para a demonstração do próximo lema, utilizamos como o referência o Lema 3 de (OLIVEIRA, 2015). Ele será importante para demonstrar o Teorema 1.11 da próxima seção.

Teorema 1.8. *Seja $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções de classe C^1. Suponha que*

i. f_n converge pontualmente para f

ii. f_n' converge uniformemente para g.

Então, f é de classe C^1 e

$$f' \equiv g.$$

Demonstração. Seja $x \in [a, b]$. Como f_n é uma sequência de funções de classe C^1, decorre que f_n é integrável. Além disso, f_n' converge uniformemente para g. Logo, pelo Teorema 1.7,

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n'(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt, \tag{1.2}$$

onde

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t) = g(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Desse modo, podemos reescrever (1.2) como

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt. \tag{1.3}$$

Ainda, observe que

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a)$$

e, como f_n converge pontualmente para f, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

Portanto, de (1.3),

$$\int_a^x g(t)dt = f(x) - f(a).$$

Ademais, como a sequência de funções f_n' converge uniformemente para g e f_n' é contínua, pelo Teorema 1.6, a função g é contínua em $[a, b]$. Donde segue, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$f'(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Ainda, devido a continuidade de g, podemos afirmar que f é de classe C^1 e $f' \equiv g$.

□

1.3 Integrais a um Parâmetro

Começamos definindo integral a um parâmetro, seguindo a Definição 28 de (EIDAM, 2020).

Definição 1.4 (Integral a um parâmetro)**.** *Seja $f : I \times J \to \mathbb{R}$, com $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos. Além disso, considere que para cada $x \in I$, a função $y \longmapsto f(x, y)$ seja integrável em J. Assim, podemos considerar a função*

$$F(x) = \int_J f(x, y)dy$$

definida para todo $x \in I$. A função F é chamada de integral a um parâmetro.

Na definição a seguir, nos baseamos na Definição 34 de (EIDAM, 2020). Ela nos diz quando uma integral a um parâmetro converge uniformemente em um dado intervalo.

Definição 1.5. *Considere I um intervalo contido em $\mathbb{R}$. Seja*

$$F(x) = \int_a^\infty f(x, y)dy, \quad x \in I,$$

uma integral a um parâmetro. Dizemos que F converge uniformemente em I se dado $\epsilon > 0$ existe $A > 0$, tal que

$$\left| F(x) - \int_a^b f(x, y)dy \right| < \epsilon, \quad \forall b > A \text{ e } \forall x \in I.$$

A proposição adiante é um resultado encontrado na Proposição 37 de (EIDAM, 2020). Ela fornece condições suficientes para que uma integral a um parâmetro convirja uniformemente em um dado intervalo.

Proposição 1.1 (M-Teste de Weierstrass). *Seja $f : I \times J \to \mathbb{R}$, com $J = [a, \infty)$ e*

$$F(x) = \int_J f(x,t)dt$$

a integral a um parâmetro correspondente. Suponhamos que exista uma função $g : J \to \mathbb{R}$ não negativa e integrável tal que $|f(x,t)| \leq g(t)$, $x \in I$, $t \in J$. Então, $F(x)$ converge uniformemente em I.

Demonstração. Como g é integrável,

$$\int_a^\infty g(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(t)dt = l.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$\left| \int_a^b g(t)dt - l \right| < \epsilon, \quad \forall b > A. \tag{1.4}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t)dt - l \right| &= \left| \int_a^\infty g(t)dt - \int_a^b g(t)dt \right| \\ &= \left| \left(\int_a^b g(t)dt + \int_b^\infty g(t)dt \right) - \int_a^b g(t)dt \right| \\ &= \left| \int_b^\infty g(t)dt \right|, \end{aligned}$$

e, como $g(t) \geq 0, \forall t \in J$, segue

$$\left| \int_b^\infty g(t)dt \right| = \int_b^\infty g(t)dt.$$

Sendo assim, podemos reescrever (1.4) como

$$\int_b^\infty g(t)dt < \epsilon, \quad \forall b > A. \tag{1.5}$$

Ainda, por hipótese $|f(x,t)| \leq g(t)$, $x \in I$, $t \in J$, assim

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \int_a^b f(x,t)dt \right| &= \left| \int_a^\infty f(x,t)dt - \int_a^b f(x,t)dt \right| \\ &= \left| \int_b^\infty f(x,t)dt \right| \\ &\leq \int_b^\infty |f(x,t)|dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|F(x) - \int_a^b f(x,t)dt\right| \leq \int_b^{\infty} g(t)dt, \quad x \in I. \tag{1.6}$$

Combinando (1.5) e (1.6), obtemos

$$\left|F(x) - \int_a^b f(x,t)dt\right| < \epsilon, \quad \forall b > A \text{ e } \forall x \in I.$$

Então pela Definição 1.5, F converge uniformemente em I. □

O teorema a seguir afirma que se uma função $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua, então a integral a um parâmetro $F(x)$ associada a ela é também contínua. Esse Teorema é visto no Teorema 1 (A) de (OLIVEIRA, 2015).

Teorema 1.9. *Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, a função*

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

também é contínua em $[a,b]$.

Demonstração. Como f é contínua no compacto $[a,b] \times [c,d]$, pelo Teorema 1.1, f é uniformemente contínua.

Seja $x_0 \in [a,b]$ fixo e arbitrário. Pela continuidade uniforme de f, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\forall x \in [a,b]$ e $\forall y \in [c,d]$, tem-se que

$$|(x,y) - (x_0,y)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{d-c}. \tag{1.7}$$

Perceba que,

$$|(x,y) - (x_0,y)| = |(x - x_0, 0)| = \sqrt{(x-x_0)^2} = |x - x_0| \tag{1.8}$$

e

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{d-c} \quad &\Rightarrow \quad \int_c^d |f(x,y) - f(x_0,y)|\, dy < \int_c^d \frac{\epsilon}{d-c} dy \\ &\Rightarrow \quad \int_c^d |f(x,y) - f(x_0,y)|\, dy < \epsilon. \end{aligned}$$

Utilizando que,

$$\left|\int_c^d [f(x,y) - f(x_0,y)]\, dy\right| \leq \int_c^d |f(x,y) - f(x_0,y)|\, dy,$$

temos

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{d-c} \quad &\Rightarrow \quad \left|\int_c^d [f(x,y) - f(x_0,y)]\, dy\right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \left|\int_c^d f(x,y)dy - \int_c^d f(x_0,y)dy\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{d-c} \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \epsilon. \tag{1.9}$$

Assim, combinando (1.7), (1.8) e (1.9),

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \epsilon,$$

ou seja, F é contínua em x_0. Portanto, como $x_0 \in [a,b]$ é arbitráro, segue a continuidade de F no intervalo $[a,b]$. □

O próximo teorema afirma que se uma função $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f_x(x,y)$ existe e é contínua, então $F(x)$ é de classe C^1. Ou seja, sua derivada primeira é uma função contínua. E mais, nos fornece a expressão dessa derivada. Ele é encontrado no Teorema 1 (B) de (OLIVEIRA, 2015).

Teorema 1.10. *Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f_x existe e é contínua em $[a,b] \times [c,d]$, então*

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

é de classe C^1 e

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x,y)dy.$$

Demonstração. Inicialmente, veja que como f_x é contínua no compacto $[a,b] \times [c,d]$, pelo Teorema 1.1, segue que f_x é uniformemente contínua. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, é válido que

$$|(x,y) - (x_0,y)| = |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_x(x,y) - f_x(x_0,y)| < \frac{\epsilon}{d-c}, \quad x_0 \in [a,b]. \tag{1.10}$$

Desejamos mostrar que

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \to (x_0)^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d f_x(x_0,y)dy, \quad x_0 \in [a,b)$$

e

$$F'_-(x_0) = \lim_{x \to (x_0)^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d f_x(x_0,y)dy, \quad x_0 \in (a,b].$$

De fato,

i. $x_0 \in [a,b)$ fixo e arbitrário: Considere $x \in [a,b)$ tal que $x_0 < x < x_0 + \delta$, logo x satisfaz (1.10). Como f é contínua em $[x_0,x] \times [c,d] \subset [a,b) \times [c,d]$ e diferenciável em $(x_0,x) \times [c,d]$, pelo Teorema 1.4, existe $\bar{x} \in (x_0,x)$, tal que

$$f_x(\bar{x},y) = \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0}. \tag{1.11}$$

Nas condições acima, temos as seguintes desigualdades:

$$x_0 - \delta < \underbrace{x_0 < \bar{x} < x < x_0 + \delta}_{(I)}.$$

Assim, segue de (1.10) e de (I) que

$$|f_x(\bar{x}, y) - f_x(x_0, y)| < \frac{\epsilon}{d-c}. \tag{1.12}$$

Utilizando (1.11) e (1.12), para $x_0 < x < x_0 + \delta$, temos

$$\left|\frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} - f_x(x_0, y)\right| < \frac{\epsilon}{d-c}$$

$$\Rightarrow \quad \int_c^d \left|\frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0} - f_x(x_0, y)\right| dy < \int_c^d \frac{\epsilon}{d-c} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_c^d f(x,y)dy - \int_c^d f(x_0,y)dy\right) - \int_c^d f_x(x_0,y)dy\right| < \epsilon$$

Portanto,

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_c^d f_x(x_0,y)dy\right| < \epsilon.$$

Ou seja,

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \to (x_0)^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d f_x(x_0,y)dy, \quad x_0 \in [a,b). \tag{1.13}$$

ii. $x_0 \in (a,b]$ fixo e arbitrário: Considere $x \in [a,b)$ tal que $x_0 - \delta < x < x_0$, ou seja, x satisfaz (1.10). Como f é contínua em $[x, x_0] \times [c,d] \subset (a,b] \times [c,d]$ e diferenciável em $(x, x_0) \times [c,d]$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $x^* \in (x, x_0)$, tal que

$$f_x(x^*, y) = \frac{f(x_0,y) - f(x,y)}{x_0 - x}. \tag{1.14}$$

Por (1.10),

$$-(x^* - x_0) < \delta \Rightarrow |f_x(x^*, y) - f_x(x_0, y)| < \frac{\epsilon}{d-c}, \quad x_0 \in (a,b]. \tag{1.15}$$

Analogamente ao caso anterior, utilizando (1.14) e (1.15), podemos mostrar que

$$F'_-(x_0) = \lim_{x \to (x_0)^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_c^d f_x(x_0,y)dy. \tag{1.16}$$

Portanto, como em ambos os casos x_0 é arbitrário, concluímos de (1.13) e (1.16),

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x,y)dy, \quad \forall x \in (a,b),$$

$$F'_+(a) = \int_c^d f_x(a,y)dy,$$

e

$$F'_-(b) = \int_c^d f_x(b,y)dy.$$

Ademais, por hipótese, f_x é contínua, então, pelo Teorema 1.9, F' é contínua. Isto é, F é de classe C^1. □

O próximo e último teorema, é o principal resultado desta seção, pois será utilizado para demonstrar a diferenciabilidade da função Gama para $z > 1$. Ele é uma versão modificada do Teorema 7 de (OLIVEIRA, 2015).

Teorema 1.11. *Seja $x_0 > 1$. Considere $f : (1, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua, com f_x contínua em $(1, \infty) \times [0, \infty)$. Também, suponha que para cada $x > 1$, as funções $y \longmapsto f(x, y)$ e $y \longmapsto f_x(x, y)$ são integráveis. Ou seja, as integrais a um parâmetro*

$$g(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy$$

e

$$G(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy$$

convergem para todo $x \in (1, \infty)$. Além disso, suponha que g converge uniformemente em intervalos compactos de $(1, \infty)$ contendo x_0, digamos $[a, b]$. Então, G é derivável em $[a, b]$ e

$$G'(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstração. Seja $x_0 \in I_{x_0} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (1, \infty)$, com $\delta \in (0, 1)$ arbitrário. Por hipótese, para cada $x \in I_{x_0}$, as funções $y \longmapsto f(x, y)$ e $y \longmapsto f_x(x, y)$, com $y \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, são integráveis. Então, pela Definição 1.4, podemos considerar as funções

$$g_n(x) = \int_0^n f_x(x, y)dy, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$G_n(x) = \int_0^n f(x, y)dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos que:

1. $G_n : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1;

2. G'_n converge uniformemente para g em I_{x_0};

3. G_n converge pontualmente para G.

Com efeito,

1. Por hipótese $f : I_{x_0} \times [0, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f_x : I_{x_0} \times [0, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ existe e é contínua. Então, segue do Teorema 1.10 que G_n é de classe C^1 e

$$G'_n(x) = \int_0^n f_x(x, y)dy.$$

$$\Rightarrow G'_n(x) = g_n(x), \quad x \in I_{x_0}. \tag{1.17}$$

2. Por (1.17), basta mostrarmos que g_n converge uniformemente para g em I_{x_0}. Por hipótese,

$$g(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy$$

converge uniformemente em I_{x_0}. Então, pela Definição 1.5, dado $\epsilon > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$\left|g(x) - \int_0^b f_x(x,y)dy\right| < \epsilon, \quad \forall b > A \text{ e } \forall x \in I_{x_0}$$

Ainda, pela propriedade arquimediana dos naturais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|g(x) - \int_0^n f_x(x,y)dy\right| = |g_n(x) - g(x)| < \epsilon, \quad \forall n > n_0 \text{ e } \forall x \in I_{x_0}.$$

Portanto, g_n converge uniformemente para g em I_{x_0}. Donde segue que G_n converge uniformemente para g em I_{x_0}.

3. Por hipótese

$$G(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$$

converge para todo $x \in I_{x_0}$. Então, de modo análogo ao que foi feito no caso anterior, podemos concluir que para cada $x \in I_{x_0}$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$;

$$|G_n(x) - G(x)| < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Isto é, G_n converge pontualmente para G em I_{x_0}.

Por fim, dos itens 1, 2 e 3 concluímos, pelo Teorema 1.8, que $G : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 (em particular, derivável) e que

$$G'(x) = g(x), \quad \forall x \in I_{x_0}.$$

□

1.4 Funções Convexas

Abaixo relembramos as definições de funções convexas e de funções estritamente convexas. Tais definições são encontradas em (LIMA, 2014b).

Definição 1.6 (Função convexa)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes. Mais precisamente, f é convexa quando*

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Definição 1.7 (Função estritamente convexa)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa quando*

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou seja, a igualdade na Definição 1.6 não ocorre.

A seguir temos duas caracterizações para funções convexas. A primeira é vista na página 109 de (LIMA, 2014b) e a segunda na página 112 da mesma referência.

Proposição 1.2 (Caracterização 1 de funções convexas)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. A função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se e somente se*

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Demonstração. Segue da Definição 1.6. □

Observação 1.1. *O resultado acima vale para funções estritamente convexas. Nesse caso, no lugar de $\leq$ temos $<$.*

Proposição 1.3 (Caracterização 2 de funções convexas)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. A função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa se e somente se*

$$a, b \in I \text{ e } 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b). \tag{1.18}$$

Demonstração. Seja $[a, b] \subset I$. Dado $x \in [a, b]$, podemos escrever, de modo único, $x = a(1 - t) + tb$ e $f(x) = f(a)(1 - t) + tf(b)$, com $0 \leq t \leq 1$. Assim, supondo f convexa, segue que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}t(b - a) = (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Logo, pela Definição 1.6, segue (1.18). Por outro lado, supondo que (1.18) ocorre, como

$$\begin{aligned}
(1-t)f(a) + tf(b) &= \left(\frac{b - x}{b - a}\right) f(a) + \left(\frac{x - a}{b - a}\right) f(b) + f(a) - f(a) \\
&= \frac{(b - x)f(a) + (x - a)f(b) + (b - a)(f(a) - f(a))}{b - a} \\
&= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).
\end{aligned}$$

Temos,

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Portanto, f é convexa, pela Definição 1.6. □

Observação 1.2. *O resultado acima vale para funções estritamente convexas. Nesse caso, t varia no intervalo $(0, 1)$ e trocamos $\leq$ por $<$.*

Na próxima proposição, temos alguns critérios interessantes para mostrar que uma função é estritamente convexa. Um deles é que "f' estritamente crescente $\Rightarrow f$ estritamente convexa".

Proposição 1.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Considere os seguintes itens:*

1. *f' estritamente crescente;*

2. *Para quaisquer $a, x \in I$, tem-se*

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a);$$

3. f estritamente convexa.

Então, 1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3. Em particular, f' estritamente crescente implica em f estritamente convexa.

Demonstração. De fato,

- 1 $\Rightarrow$ 2: Suponha f' estritamente crescente e considere $a, x \in I$ arbitrários. Como f é diferenciável em I, em particular, f é contínua em $[a, x] \subset I$ e é diferenciável em (a, x). Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a, x)$, tal que
$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Como $c > a$, por hipótese, $f'(c) > f'(a)$. Assim,
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a) \quad &\Rightarrow \quad f(x) - f(a) > f'(a)(x - a) \\ &\Rightarrow \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a). \end{aligned}$$

- 2 $\Rightarrow$ 3: Sejam $a < x < b$ em I e suponha que a condição $2.$ seja válida. Desejamos mostrar que f é estritamente convexa, isto é,
$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$
Com efeito, por hipótese, temos
$$f(a) > f(x) + f'(x)(a - x) \quad \text{e} \quad f(b) > f(x) + f'(x)(b - x).$$
Daí, como $x - a > 0$,
$$\begin{aligned} f(a) > f(x) + f'(x)(a - x) \quad &\Rightarrow \quad f(x) - f(a) < f'(x)(x - a) \\ &\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(x). \end{aligned} \tag{1.19}$$
Da mesma forma, como $b - x > 0$, obtemos
$$\begin{aligned} f(b) > f(x) + f'(x)(b - x) \quad &\Rightarrow \quad f(b) - f(x) > f'(x)(b - x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} > f'(x). \end{aligned} \tag{1.20}$$
Logo, de (1.19) e (1.20),
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$
Assim, da desigualdade acima,
$$(b - x)(f(x) - f(a)) < (x - a)(f(b) - f(x))$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad bf(x)-bf(a)-xf(x)+xf(a) &< xf(b)-xf(x)-af(b)+af(x)
\end{aligned}
$$

Somando $xf(x)+af(a)$,

$$
\begin{aligned}
bf(x)-bf(a)+xf(a)+af(a) &< xf(b)-af(b)+af(x)+af(a)\\
\Rightarrow \quad bf(x)-bf(a)-af(x)+af(a) &< xf(b)-af(b)-xf(a)+af(a)\\
\Rightarrow \quad b(f(x)-f(a))-a(f(x)-f(a)) &< x(f(b)-f(a))-a(f(b)-f(a))\\
\Rightarrow \quad (b-a)(f(x)-f(a)) &< (x-a)(f(b)-f(a))\\
\Rightarrow \quad (b-a)f(x) &< (b-a)f(a)+(x-a)(f(b)-f(a)).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

ou seja, pela Observação 1.1, segue que f é estritamente convexa.

□

No resultado abaixo mostramos a Indução de Cauchy. Utilizamos essa indução na demonstração do próximo lema.

Proposição 1.5 (Indução de Cauchy)**.** *Se*

(i) $P(2)$;

(ii) $P(n) \Rightarrow P(2n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $P(n+1) \Rightarrow P(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

então $P(n)$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Usaremos indução finita sobre n. Primeiramente, note que, por (i) e (iii), $P(1)$ é válida, pois, por (i), $P(2)$ vale e $P(2) \overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} P(1)$. Agora, supondo que, pra algum $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale, vamos mostrar que $P(n+1)$ também é válida. Para isso, vamos dividir a prova em dois casos: $n = 2k$ e $n = 2k+1$, com $k \in \mathbb{N}$. Se $n = 2k$, temos

$$P(n) = P(2k) \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} P(4k) = P((2k+1)+(2k-1)).$$

Assim, aplicando a hipótese (iii) $2k-1$ vezes, segue que

$$P(n) = P(2k) \Rightarrow P(2k+1) = P(n+1).$$

Ou seja, $P(n+1)$ é verídica para n par. Agora, mostraremos que $P(n+1)$ também é válida para n da forma $n = 2k+1$. Por hipótese, $P(2k+1)$ vale, assim

$$P(n) = P(2k+1) \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} P(4k+2) = P((2k+2)+2k).$$

Aplicando a hipótese (iii) $2k$ vezes, obtemos

$$P(n) = P(2k+1) \Rightarrow P(2k+2) = P(n+1).$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira para n ímpar. Portanto, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Usaremos o lema a seguir para mostrar a próxima proposição, que nos traz uma caracterização para funções contínuas e convexas. O resultado do lema é encontrado na página 5 de (ARTIN, 1964), já a caracterição da próxima proposição é um resultado visto no Teorema 1.5 de (ARTIN, 1964).

Lema 1.2. *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Suponha que*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.21}$$

para todos $a, b \in I$*. Então, a desigualdade acima pode ser generalizada da seguinte forma:*

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}, \tag{1.22}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$ *e para todos* $x_1, \cdots, x_n \in I$*.*

Demonstração. Usaremos a Indução de Cauchy para mostrar (1.22). Por hipótese, (1.22) é válida para $n = 2$, donde segue o item (i) Indução de Cauchy. Mostraremos que se (1.22) é válida para n então também é verdadeira para $2n$. De fato, sejam $x_1, \cdots, x_{2n} \in I$. Como,

$$a = \frac{x_1+\cdots x_n}{n} \in I \quad \text{e} \quad b = \frac{x_{n+1}+\cdots x_{2n}}{n} \in I,$$

então, por (1.21), segue que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) \leq f\left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right).$$

Ainda, como 1.22 é válida para n, segue da desigualdade acima que

$$2f\left(\frac{x_1+\cdots x_{2n}}{2n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots f(x_n)}{n} + \frac{\overbrace{f(x_{n+1})+\cdots f(x_{2n})}^{n \text{ elementos}}}{n}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1+\cdots x_{2n}}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n}\left(f(x_1)+\cdots f(x_{2n})\right).$$

Isto mostra o item (ii) do Princípio de Indução de Cauchy.

Agora, demonstraremos que se (1.22) é válida para $n+1$ então também é verdadeira para n. Com efeito, primeiramente, tome

$$x_{n+1} = \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n) \in I.$$

Daí, como (1.22) é verdade para $n+1$, segue

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f\left(\frac{nx_{n+1}+x_{n+1}}{n+1}\right) \\ &= f\left(\frac{x_1+\cdots x_n+x_{n+1}}{n+1}\right) \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$(n+1)f(x_{n+1}) - f(x_{n+1}) \leq f(x_1) + \cdots + f(x_n)$$

$$\Rightarrow f(x_{n+1}) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right).$$

Portanto, da definição de x_{n+1}, segue que

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right).$$

Isto é, mostramos que item (iii) do Princípio de Indução de Cauchy é válido.

Por fim, pela Proposição 1.5, o resultado segue para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todos $x_1, \cdots, x_n \in I$. $\square$

Proposição 1.6 (Caracterização de funções contínuas e convexas)**.** *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é convexa se e somente se*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.23}$$

para todos $a, b \in I$.

Demonstração. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Para mostrar que se f é convexa então a desigualdade (1.23) ocorre para todos $a, b \in I$, basta tomar $t = \frac{1}{2}$ na Proposição 1.3 .

Agora, supondo que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{1.24}$$

para todos $a, b \in I$, mostraremos que f é convexa. De fato, a princípio considere $x_1, x_2 \in I$ arbitrários e $t \in (0,1)$ também arbitrário. Desejamos demonstrar que

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Inicialmente, mostraremos que existe uma sequência de números racionais pertencentes ao intervalo $[0,1)$ que converge para t. Pois bem, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe $y_n \in \mathbb{Q}$, tal que

$$y_n \in \left[t - \frac{t}{n}, t\right]. \tag{1.25}$$

Note que, $\left[t - \frac{t}{n}, t\right] \subset [0,1)$, pois $t < 1$ e

$$0 \leq t - \frac{t}{n} < t \Leftrightarrow -t \leq -\frac{t}{n} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{t}{n} \leq t \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1.$$

Logo, $y_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1), \forall n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, y_n é da forma $\frac{s_n}{r_n}$, com $r_n, s_n \in \mathbb{N}^*$ e $0 < s_n < r_n$ ou $r_n \in \mathbb{N}^*$ e $s_n = 0$. Além disso, de (1.25),

$$t - \frac{t}{n} \leq y_n \leq t.$$

Ademais, $\lim_{n\to\infty} t - \frac{t}{n} = \lim_{n\to\infty} t = t$, então, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = t. \tag{1.26}$$

Como (1.24) é válida, pelo Lema 1.2,

$$f\left(\frac{(r_n - s_n)x_1 + s_n x_2)}{r_n}\right) \leq \frac{(r_n - s_n)f(x_1) + s_n f(x_2)}{r_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.27}$$

onde

$$(r_n - s_n)x_1 + s_n x_2 = \underbrace{x_1 + \cdots + x_1}_{(r_n - s_n)\text{ vezes}} + \underbrace{x_2 + \cdots + x_2}_{s_n \text{ vezes}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}..$$

Desse modo, podemos reescrever (1.27) como

$$f\left(\left(1 - \frac{s_n}{r_n}\right)x_1 + \frac{s_n}{r_n}x_2\right) \leq \left(1 - \frac{s_n}{r_n}\right)f(x_1) + \frac{s_n}{r_n}f(x_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f\left((1 - y_n)x_1 + y_n x_2\right) \leq (1 - y_n)f(x_1) + y_n f(x_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

Pela continuidade de f e por (1.26),

$$\lim_{n\to\infty} f\left((1 - y_n)x_1 + y_n x_2\right) = f\left((1 - t)x_1 + t x_2\right),$$

então, de (1.28),

$$\lim_{n\to\infty} f\left((1 - y_n)x_1 + y_n x_2\right) \leq \lim_{n\to\infty} \left((1 - y_n)f(x_1) + y_n f(x_2)\right)$$

$$\Rightarrow f((1 - t)x_1 + t x_2) \leq (1 - t)f(x_1) + t f(x_2).$$

Como $t \in (0, 1)$ e $x_1, x_2 \in I$ são arbitrários,

$$f((1 - t)x_1 + t x_2) \leq (1 - t)f(x_1) + t f(x_2), \tag{1.29}$$

para todos $x_1, x_2 \in I$ e para todo $t \in (0, 1)$.

Se $t = 0$ ou $t = 1$, f satisfaz a Proposição 1.3, visto que, para todos $x_1, x_2 \in I$,

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow f((1 - 0)x_1 + 0x_2) = (1 - 0)f(x_1) + 0f(x_2), \\ \\ t = 1 \Rightarrow f((1 - 1)x_1 + 1x_2) = (1 - 1)f(x_1) + 1f(x_2). \end{cases} \tag{1.30}$$

Portanto, de (1.29) e (1.30), concluímos que f é convexa. $\square$

Abaixo enunciamos um resultado visto no Corolário 1 de (LIMA, 2014b), que será usado na seção 9.7. Esse resultado nos diz que qualquer ponto crítico de uma função convexa é necessariamente um ponto de mínimo absoluto para essa função.

Proposição 1.7. *Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.*

Demonstração. Consultar o Corolário 1 do capítulo 9 de (LIMA, 2014b). $\square$

A proposição abaixo será importante para concluirmos o estudo da monotonicidade da função Gama.

Proposição 1.8. *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa. Se $x_0 \in I$ é um ponto de mínimo absoluto, então para $x > x_0$ a função f é crescente. Por outro lado, para $x < x_0$, f é decrescente.*

Demonstração. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa. Suponha que $x_0 \in I$ é ponto de mínimo absoluto de f, logo

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in I.$$

Também, suponha $a, b \in I$ com $x_0 < a < b$. Mostraremos que $f(a) < f(b)$. De fato, como $a \in (x_0, b)$, o ponto a pode ser escrito como

$$a = (1 - t_0)x_0 + t_0 b, \quad \text{para algum } t_0 \in (0, 1),$$

pois a pertence ao segmento de reta que liga x_0 a b. Usando a hipótese de que f é estritamente convexa, segue que

$$\begin{aligned} f((1 - t_0)x_0 + t_0 b) &< (1 - t_0)f(x_0) + t_0 f(b) \\ &\leq (1 - t_0)f(b) + t_0 f(b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a) < f(b).$$

Portanto, como $a, b \in I$ são arbitrários, segue que f é crescente, para $x > x_0$.

Analogamente, podemos mostrar que, para $x < x_0$, f é decrescente. Basta tomar $a', b' \in I$, com $a' < b' < x_0$. □

2 Função Gama

A função Gama de Euler, representada pela letra grega Γ, é uma função especial da Matemática, conhecida por generalizar o fatorial de um número natural. Ela é imprescindível no estudo do Cálculo Fracionário. Inclusive, está presente na definição dos operadores fracionários de Riemann-Liouville e de Caputo. Logo, não podemos iniciar o estudo do Cálculo Fracionário, sem antes definirmos a função Gama e demonstrarmos as suas principais propriedades.

2.1 Definição e propriedades

A seguir, definimos a função Gama de Euler nos reais positivos. Mais adiante, na seção 4, definiremos a função Gama nos reais negativos não inteiros.

Definição 2.1 (Função Gama de Euler)**.** *Para $z > 0$, a função Gama de Euler, denotada por $\Gamma(z)$, é definida como sendo a integral imprópria*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{2.1}$$

Verificaremos que a integral (2.1) está bem definida. Para isso, dividiremos a prova em dois casos. Mostraremos que as integrais

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{e} \quad \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

convergem para cada $z > 0$.

Lema 2.1. *A integral*
$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt \tag{2.2}$$
converge para todo $z > 0$.

Demonstração. Se $z \geq 1$, a função $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ é contínua em $[0,1]$, portanto a integral (2.2) converge para todo $z \geq 1$.

Já para $z \in (0,1)$, a integral (2.2) é uma integral imprópria do tipo 2, assim podemos escrevé-la como

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Note que,

$$\begin{aligned} 0 < b \leq t \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 \leq -t \leq -b \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-1} \leq e^{-t} \leq e^{-b} \\ &\Leftrightarrow \quad t^{z-1}e^{-1} \leq t^{z-1}e^{-t} \leq t^{z-1}e^{-b}. \end{aligned}$$

Portanto,
$$b \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t^{z-1}e^{-t} \leq t^{z-1}, \tag{2.3}$$
pois $e^{-b} \leq 1$. Donde segue que

$$\int_0^1 t^{z-1}dt = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 t^{z-1}dt = \lim_{b\to 0^+} \left.\frac{t^z}{z}\right|_b^1 = \lim_{b\to 0^+} \frac{1}{z} - \frac{b^z}{z} = \frac{1}{z}. \tag{2.4}$$

Assim, de (2.3) e (2.4), a integral (2.2) converge para todo $z \in (0,1)$.

Por fim, concluímos que a integral

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$$

converge para todo $z > 0$. $\square$

Lema 2.2. *A integral*
$$\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \tag{2.5}$$
converge para todo $z > 0$.

Demonstração. Seja $z > 0$. *A priori*, mostremos que a desigualdade

$$0 \leq t^{z-1}e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}} \tag{2.6}$$

é válida para t suficientemente grande. De fato, dado $z-1 \in \mathbb{R}$, pela propriedade arquimediana dos naturais, existe $n_z \in \mathbb{N}$, tal que $z-1 \leq n_z$. Assim, para $t > 1$ suficientemente grande,
$$\begin{aligned} &0 \leq t^{z-1} \leq t^{n_z} \\ \Rightarrow\ &0 \leq \frac{t^{z-1}}{e^{\frac{t}{2}}} \leq \frac{t^{n_z}}{e^{\frac{t}{2}}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n_z}}{e^{\frac{t}{2}}} = 2^{n_z} \lim_{t\to\infty} \frac{n_z!}{e^{\frac{t}{2}}} = 0,$$

donde segue

$$\lim_{t\to\infty} t^{z-1} e^{-\frac{t}{2}} = 0. \tag{2.7}$$

Como $\lim_{t\to\infty} 1 = 1$ e $0 < 1$, segue de (2.7) que existe $A > 1$, tal que a desigualdade

$$\frac{t^{z-1}}{e^{\frac{t}{2}}} < 1$$

é verdadeira para todo $t > A$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \frac{t^{z-1}}{e^{\frac{t}{2}}} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad t^{z-1} < e^{\frac{t}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad t^{z-1} e^{-t} < e^{-\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

isto é, a desigualdade (2.6) é válida para todo $t > A$.

Além disso,

$$\int_A^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt = \lim_{b\to\infty} \int_A^b e^{-\frac{t}{2}} dt = \lim_{b\to\infty} -2e^{-\frac{t}{2}}\Big|_A^b = \lim_{b\to\infty} -2e^{-\frac{b}{2}} + 2e^{-\frac{A}{2}} = 2e^{-\frac{A}{2}}.$$

Portanto, da igualdade acima e de (2.6), segue pelo teste da comparação para integrais impróprias que

$$\int_A^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.8}$$

converge para todo $z > 0$. Por outro lado, veja que $t^{z-1}e^{-t}$ é contínua para $1 \leq t \leq A$, logo

$$\int_1^A t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.9}$$

converge para todo $z > 0$.

Por fim, de (2.8) e (2.9), segue que a integral

$$\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

converge para todo $z > 0$. □

Teorema 2.1 (Convergência da função Gama de Euler)**.** *Seja $z > 0$. A função Gama de Euler*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

está bem definida.

Demonstração. De fato, segue do Lema 2.1 e do Lema 2.2. □

Veremos a seguir duas importantes propriedades da função $\Gamma(z)$. Uma delas nós diz que a função $\Gamma(z)$ generaliza o fatorial de um número natural.

Propriedade 2.1. *Para todo $z > 0$ é verdade que*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Demonstração. Primeiro vamos integrar por partes a integral

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt,$$

para isso consideremos a substituição abaixo:

$$\begin{cases} u = t^z & dv = e^{-t}dt \\ du = zt^{z-1}dt & v = -e^{-t}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^z e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} -t^z e^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b z t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} -b^z e^{-b} + \lim_{b\to\infty} \int_0^b z t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} -b^z e^{-b} + z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Mas, de modo análogo ao que foi feito para mostrar o limite (2.7), podemos mostrar que

$$\lim_{b\to\infty} -b^z e^{-b} = 0.$$

Portanto,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z > 0.$$

□

Propriedade 2.2. *A função Gama de Euler generaliza o fatorial de um número natural, isto é,*

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Usaremos o princípio da indução finita sobre $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $n = 0$ temos que

$$\Gamma(0+1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + 1 = 1,$$

ou seja,

$$\Gamma(0+1) = 0!.$$

Agora, suponha, por hipótese de indução, que

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N}^*$$

seja verdadeiro. Precisamos provar que tal igualdade é válida para $n+1$. Com efeito, pela Propriedade 2.1 e por hipótese de indução,

$$\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n!$$

$$\Rightarrow \Gamma((n+1)+1) = (n+1)!.$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.2 Continuidade

A seguir, provamos que a função Gama é contínua, utilizando o Teorema 1.5.

Teorema 2.2. *A função* Γ *é contínua.*

Demonstração. Seja $\phi(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ e defina $\phi_n(t) = \phi(x_n, t)$ e $\phi_0(t) = \phi(x_0, t)$. Mostraremos que Γ é contínua em $x_0 > 0$. Para isso, dividiremos a prova em dois casos, $x_0 > 1$ e $x_0 \in (0, 1]$. No primeiro caso, utilizaremos o Teorema 1.5, isto é, provaremos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \Gamma(x_0).$$

De fato,

1. $x_0 > 1$: Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Mostraremos que ϕ_n converge uniformemente para ϕ_0 de acordo com a Definição 1.3 e concluiremos, pelo Teorema 1.7, que $\lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \Gamma(x_0)$. Inicialmente, perceba que

$$|\phi_n(t) - \phi_0(t)| = \left|t^{x_n-1} - t^{x_0-1}\right| e^{-t} = |t^{x_n} - t^{x_0}|\, t^{-1}e^{-t}.$$

Como $x \mapsto t^x$ é contínua em $[x_0, x_n]$ e derivável em (x_0, x_n), pelo Teorema do Valor Médio, existe $\bar{x} \in (x_0, x_n)$, tal que

$$\ln(t)t^{\bar{x}} = \frac{t^{x_0} - t^{x_n}}{x_0 - x_n} \Rightarrow |t^{x_0} - t^{x_n}| = |x_0 - x_n|\, |\ln(t)| t^{\bar{x}}.$$

Assim,

$$|\phi_n(t) - \phi_0(t)| = |x_0 - x_n|\, |\ln(t)| t^{\bar{x}-1}e^{-t}, \quad \bar{x} \in (x_0, x_n).$$

Defina $h(t) = |\ln(t)| t^{\bar{x}-1}e^{-t}$, $\bar{x} > 1$ e $t > 0$. Precisamos verificar que h é limitada em $(0, \infty)$, para isso notemos que, pelo Lema 1.1,

$$\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} |\ln(t)| t^{\bar{x}-1}e^{-t} = 0, \tag{2.10}$$

pois $\lim_{t\to 0} e^{-t} = 0$. Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0 \tag{2.11}$$

e, pelo Lema 1.1,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\bar{x}}}{e^t} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{t}\right)\left(\frac{t^{\bar{x}}}{e^t}\right) = 0. \tag{2.12}$$

De (2.10) e (2.12), pela definição de limite, existem $a, b > 0$, tal que h é limitada em $(0, a]$ e em $[b, \infty)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a < b$. Como h é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 1.2 (Teorema de Weierstrass), h é limitada em $[a, b]$. Logo, h é limitada em $(0, \infty)$, pois h é limitada em $(0, a]$, $[a, b]$ e em $[b, \infty)$. Assim, existe $M > 0$, tal que $h(t) < M$, para todo $t \in (0, \infty)$. Portanto,

$$|\phi_n(t) - \phi_0(t)| = |x_0 - x_n|\, h(t) < |x_0 - x_n|\, M.$$

Mas como, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n > n_0$, tem-se que

$$|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow |x_n - x_0|M < \epsilon,$$

isto é,

$$|\phi_n(t) - \phi_0(t)| < \epsilon.$$

Com isso, concluímos que ϕ_n converge uniformemente para ϕ_0. Desse modo, pelo Teorema 1.7,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \phi_n(t)dt = \int_0^{\infty} \phi_0(t)dt \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \Gamma(x_0).$$

2. $0 < x_0 \leq 1$: Pela Propriedade 2.1,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x > 0. \tag{2.13}$$

Ainda,

$$0 < x_0 \leq 1 \Rightarrow 1 < x_0 + 1 \leq 2,$$

donde segue, pelo item anterior, que $\Gamma(x_0+1)$ é contínua. Assim, por (2.13), $\Gamma(x_0)$ também é contínua. Portanto, pela arbitrariedade de $x_0 \in (0, 1]$, segue que a função Gama é contínua no intervalo $(0, 1]$.

□

2.3 Diferenciabilidade

A priori, vamos determinar a derivada parcial com respeito a z da função $f : (1, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(z, t) = t^{z-1}e^{-t}. \tag{2.14}$$

Observe que podemos definir a derivada parcial de f com respeito a z, para $z > 1$, como

$$f_z(z, t) = \begin{cases} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

pois $\ln(t)t^{z-1}e^{-t}$ pode ser definida continuamente em $t = 0$, visto que, pelo Lema 1.1,

$$\lim_{t\to 0^+} \ln(t)t^{z-1}e^{-t} = 0, \quad z > 1. \tag{2.16}$$

Agora, utilizaremos o Teorema 1.11 para mostrar que Γ é diferenciável quando $z > 1$. Para isso, é necessário verificarmos que a função f e f_z definidas, respectivamente, em (2.14) e (2.15) satisfazem:

1. $g(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} f_z(z, t)dt$ converge para todo $z > 1$;

2. Dado $z_0 > 1$ fixo, porém arbitrário. A integral $g(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} f_z(z, t)dt$ converge uniformemente em compactos de $(1, \infty)$ do tipo $[a, b]$ contendo z_0;

3. $\Gamma(z) = \int_0^\infty f(z,t)dt$ converge para todo $z > 1$.

A demonstração do item 1 é feita no Lema 2.3. Já a demonstração do item 2 é encontrada mais adiante, no Lema 2.4. E, o item 3 é um resultado já conhecido, provado no Teorema 2.1.

Antes de demonstrarmos o Lema 2.3, vejamos uma proposição que será referenciada em sua demonstração.

Proposição 2.1. $\ln(x) < x, \quad \forall x > 0.$

Demonstração. Defina $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ por $h(x) = e^x - x$. Note que $h(0) = 1$ e $h'(x) = e^x - 1 > 0$, logo h é crescente. Portanto, $h(x) > 1 > 0$, onde $x < e^x$. Assim, o resultado da proposição é válido, pois para $x > 0$, temos que

$$\ln(x) < x \Leftrightarrow e^{\ln(x)} < e^x \Leftrightarrow x < e^x.$$

□

Lema 2.3. *A integral*

$$g(z) = \int_0^\infty f_z(z,t)dt \tag{2.17}$$

converge para todo $z > 1$.

Demonstração. Seja $z > 1$. Vamos mostrar que as integrais

$$\int_1^\infty f_z(z,t)dt \quad \text{e} \quad \int_0^1 f_z(z,t)dt$$

convergem. Com efeito, vimos em (2.15) que, para $z > 1$, $f_z(z,t)$ é contínua para todo $t \in [0,1]$. Donde segue a integrabilidade de $f_z(z,t)$ em $[0,1]$. Por outro lado, pela Proposição 2.1, para $t \geq 1$,

$$0 \leq \ln(t) < t \Rightarrow 0 \leq \ln(t)e^{-t}t^{z-1} < e^{-t}t^z. \tag{2.18}$$

Perceba que,

$$0 \leq \int_1^\infty e^{-t}t^z dt \leq \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \Gamma(z+1) \tag{2.19}$$

Isto é,

$$\int_1^\infty e^{-t}t^z dt$$

converge.

Logo, pelo teste da comparação para integrais impróprias, segue de (2.18) e (2.19) que

$$\int_1^\infty \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$$

é convergente. Portanto, (2.17) converge para todo $z > 1$. □

Na demonstração do lema a seguir utilizamos como base a seção 17.3.2 de (ZORICH, 2004).

Lema 2.4. *Seja $z > 1$. A integral a um parâmetro*

$$g(z) = \int_0^\infty f_z(z,t)dt$$

converge uniformemente em compactos de $(1,\infty)$ do tipo $[a,b]$ contendo z_0.

Demonstração. Seja $z_0 \in [a,b] \subset (1,\infty)$ arbitrário. Vamos mostrar, utilizando a Proposição 1.1, que g converge uniformemente em $[a,b]$. De fato, primeiramente note que, pelo Lema 1.1,

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{z}{2}} \ln(t) = 0, \quad \forall z > 0.$$

Assim, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} 0 < t < \delta \quad &\Rightarrow \quad |t^{\frac{z}{2}} \ln(t)| < 1 \\ &\Rightarrow \quad t^{\frac{z}{2}-1}\left(t^{\frac{z}{2}}|\ln(t)|\right) < t^{\frac{z}{2}-1} \\ &\Rightarrow \quad t^{z-1}|\ln(t)| < t^{\frac{z}{2}-1} \\ &\Rightarrow \quad t^{z-1}|\ln(t)|e^{-t} < t^{\frac{z}{2}-1} \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < t < \delta \Rightarrow t^{z-1}|\ln(t)|e^{-t} < t^{\frac{z}{2}-1}, \quad \forall z > 0. \tag{2.20}$$

Afirmamos que existe

$$h(t) = \begin{cases} t^{\frac{a}{2}-1}, & t \in (0,\delta), \\ t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}, & t \in [\delta, 1], \\ t^{b-1}\ln(t)e^{-t}, & t > 1, \end{cases}$$

satizfazendo as hipóteses da Proposição 1.1. Com efeito,

i. $t \in (0,\delta)$: De (2.20),

$$\begin{aligned} 0 < t < \delta \quad &\Rightarrow \quad t^{z-1}|\ln(t)|e^{-t} < t^{\frac{a}{2}-1}, \quad \forall z \in [a,b] \subset (1,\infty), \\ &\Rightarrow \quad |f_z(z,t)| \leq t^{\frac{a}{2}-1}, \quad \forall z \in [a,b] \subset (1,\infty), \end{aligned} \tag{2.21}$$

pois para t próximo de zero,

$$t^{\frac{z}{2}-1} \leq t^{\frac{a}{2}-1}.$$

Além disso,

$$\int_0^\delta t^{\frac{a}{2}-1}dt = \frac{a}{2}\delta^{\frac{a}{2}}. \tag{2.22}$$

ii. $t \in [\delta, 1]$: Note que,

$$\begin{aligned} t \in [\delta,1] \quad &\Rightarrow \quad t^{z-1}|\ln(t)|e^{-t} \leq t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}, \quad \forall z \in [a,b] \subset (1,\infty) \\ &\Rightarrow \quad |f_z(z,t)| \leq t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}, \quad \forall z \in [a,b] \subset (1,\infty) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ademais, como $t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}$ é contínua em $[\delta, 1]$, segue que $t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}$ é integrável em $[\delta, 1]$.

iii. $t \in [1, \infty)$: Veja que,

$$t \in [1,\infty) \quad \Rightarrow \quad t^{z-1}\ln(t)e^{-t} \leq t^{b-1}\ln(t)e^{-t}, \quad \forall z \in [a,b] \subset (1,\infty)$$
$$\Rightarrow \quad |f_z(z,t)| \leq t^{b-1}\ln(t)e^{-t}, \quad \forall z \in [a,b] \subset (1,\infty) \qquad (2.24)$$

Ainda, pela demonstração do Lema 2.3, a integral

$$\int_1^{\infty} t^{b-1}\ln(t)e^{-t}dt, \quad b > 1 \qquad (2.25)$$

existe.

Portanto, de (2.21), (2.23) e (2.24), para todo $z \in [a, b]$, segue que

$$|f_z(z,t)| \leq h(t) = \begin{cases} t^{\frac{a}{2}-1}, & t \in (0,\delta), \\ t^{a-1}|\ln(t)|e^{-t}, & t \in [\delta, 1], \\ t^{b-1}\ln(t)e^{-t}, & t > 1. \end{cases}$$

Além disso, de (2.22), pelo argumento dado em ii. e por (2.25), concluímos que $h(t)$ é integrável. Ainda, $h(t) \geq 0$, $t \in (0,\infty)$. Isto é, pela Proposição 1.1,

$$g(z) = \int_0^{\infty} f_z(z,t)dt$$

converge uniformemente em $[a, b]$. □

O Teorema a seguir garante a diferenciabilidade da função Gama de Euler e, além disso, nos diz como é a expressão da sua derivada de ordem 1.

Teorema 2.3 (A função Gama é diferenciável)**.** *Seja* $z > 0$*. A função*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

é diferenciável e

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos: $z \in (0, 1]$ e $z > 1$.

i. $z > 1$: Desejamos utilizar o Teorema 1.11 para provar este caso. Defina $f, f_z : (1,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, tais que $f(z,t) = t^{z-1}e^{-t}$ e

$$f_z(z,t) = \begin{cases} \ln(t)t^{z-1}e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Temos que, para $z > 1$, as funções f e f_z são contínuas em $(1,\infty) \times [0,\infty)$. Além disso, pelo Lema 2.3, a integral

$$g(z) = \int_0^{\infty} f_z(z,t)dt$$

converge para todo $z > 1$ e pelo Lema 2.4 converge uniformemente em compactos de $(1, \infty)$ do tipo $[a, b]$ contendo z. Ainda, sabemos do Teorema 2.1 que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

converge para todo $z \in (0, \infty)$. Ou seja, temos as hipóteses do Teorema 1.11, portanto Γ é derivável em $[a, b]$ e

$$\Gamma'(z) = g(z), \quad \forall z \in [a, b].$$

Ou melhor,

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt, \quad \forall z \in [a, b].$$

ii. $z \in (0, 1]$:

Como

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad z > 0$$

e

$$0 < z \leq 1 \Rightarrow 1 < z + 1 \leq 2,$$

segue, pelo item anterior, que $\Gamma(z + 1)$ é diferenciável. Logo, $\Gamma(z)$ com $z \in (0, 1]$ também é diferenciável. Ainda, para $z \in (0, 1]$, temos

$$\Gamma'(z) = \frac{z\Gamma'(z+1) - \Gamma(z+1)}{z^2}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\Gamma'(z+1)z - \Gamma(z+1) &= z\int_0^\infty \ln(t)t^z e^{-t}dt - \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty (z\ln(t) - 1)\, t^z e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Gamma'(z) = \frac{1}{z^2}\int_0^\infty (z\ln(t) - 1)\, t^z e^{-t}dt. \tag{2.26}$$

Considerando

$$u = (z\ln(t) - 1)\, t^z \quad \text{e} \quad dv = e^{-t}dt, \tag{2.27}$$

segue que

$$\begin{aligned}
du &= \left(zt^{-1}t^z + (z\ln(t) - 1)zt^{z-1}\right)dt \\
&= \left(zt^{z-1} + z^2\ln(t)t^{z-1} - zt^{z-1}\right)dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow du = z^2\ln(t)t^{z-1} \tag{2.28}$$

e

$$v = -e^{-t}. \tag{2.29}$$

Então, utilizando integração por partes em (2.26), de (2.27), (2.28) e (2.29), obtemos

$$\Gamma'(z) = \frac{1}{z^2}\left[-\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty z^2\ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt\right]$$

$$\Rightarrow \Gamma'(z) = -\frac{1}{z^2}\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt. \tag{2.30}$$

Afirmamos que

$$\lim_{t\to\infty}\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t} = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0^+}\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t} = 0.$$

De fato, observe que

$$\lim_{t\to\infty} z\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)\left(\frac{t^{z+1}}{e^t}\right) - \frac{t^z}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t}$$

e

$$\lim_{t\to 0^+}\left(z\ln(t)t^z - t^z\right)e^{-t} = \lim_{t\to 0^+}\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t}.$$

Pelo limite (2.11) e pelo Lema 1.1,

$$\lim_{t\to\infty} z\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)\left(\frac{t^{z+1}}{e^t}\right) - \frac{t^z}{e^t} = 0.$$

Por outro lado, como, para $z \in (0,1]$,

$$\lim_{t\to 0^+} t^z = 0$$

e, pelo Lema 1.1,

$$\lim_{t\to 0^+} z\ln(t)t^z = 0.$$

Segue que

$$\lim_{t\to 0^+}\left(z\ln(t)-1\right)t^z e^{-t} = 0.$$

Por fim, voltando para (2.30) concluímos que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Por conseguinte, pelos itens i e ii, para $z > 0$, a função $\Gamma(z)$ é diferenciável e

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt.$$

$\square$

2.4 Convexidade

No Teorema a seguir mostramos que a função Gama é convexa fazendo uso da caracterização para funções contínuas e convexas vista na proposição 1.6.

Teorema 2.4 (A função Gama é convexa)**.** *Seja $z > 0$. A função*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

é convexa.

Demonstração. Sejam $x, y > 0$ arbitrários. Mostraremos que Γ é convexa, utilizando a Proposição 1.6. De fato, veja que, se $t > 0$, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
\left(t^{\frac{x-1}{2}} - t^{\frac{y-1}{2}}\right)^2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t^{x-1} - 2t^{\frac{x+y}{2}-1} + t^{y-1} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(t^{x-1} + t^{y-1}\right) \geq 2t^{\frac{x+y}{2}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(t^{x-1} + t^{y-1}\right) e^{-t} \geq 2t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t} \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \left[t^{x-1}e^{-t} + t^{y-1}e^{-t}\right] dt \geq 2\int_0^\infty t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t}dt \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt + \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt \geq 2\int_0^\infty t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t}dt \\
&\Leftrightarrow \quad \Gamma(x) + \Gamma(y) \geq 2\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\Gamma(x) + \Gamma(y)}{2} \geq \Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 2.2 a função Gama de Euler é contínua. Portanto, pela Proposição 1.6, ela é convexa. □

O objetivo de mostrarmos o próximo resultado é utilizarmos a Proposição 1.4 para concluirmos a convexidade estrita da função Gama.

Teorema 2.5 (Γ' é estritamente crescente)**.** *Seja $z > 0$. A função*

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \ln(t)t^{z-1}e^{-t}dt$$

é estritamente crescente.

Demonstração. Com efeito, sejam $0 < x < y$. Note que,

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) - \Gamma'(y) = \int_0^1 \ln(t)t^{x-1}(1 - t^{y-x})e^{-t}dt + \int_1^\infty \ln(t)t^{x-1}(1 - t^{y-x})e^{-t}dt < 0 \\
\Rightarrow \Gamma'(x) < \Gamma'(y),
\end{aligned}$$

visto que o integrando $\ln(t)t^{x-1}(1 - t^{y-x})e^{-t}$ é negativo em $(0, 1)$ e em $(1, \infty)$. Portanto, Γ' é estritamente crescente. □

Corolário 2.1 (A função Gama é estritamente convexa)**.** *Seja $z > 0$. A função*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

é estritamente convexa.

Demonstração. Pelo Teorema 2.5, Γ' é estritamente crescente. Além disso, vimos no Teorema 2.3 que Γ é derivável. Logo, pela Proposição 1.4, segue que Γ é estritamente convexa. $\square$

2.5 Monotonicidade

Vistos os resultados anteriores, podemos concluir o estudo da monotonicidade da função Gama de Euler, como segue:

Corolário 2.2 (Monotonicidade da função Gama de Euler)**.** *Existe $x_0 \in (1, 2)$, tal que:*

- $x > x_0 \Rightarrow \Gamma$ *é crescente;*
- $x < x_0 \Rightarrow \Gamma$ *decrescente.*

Demonstração. Como Γ é contínua e diferenciável para todo $z > 0$, em particular, Γ é contínua em $[1, 2]$ e diferenciável em $(1, 2)$. Além disso, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Logo, pelo Teorema 1.3 (Teorema de Rolle), existe $x_0 \in (1, 2)$, tal que $\Gamma'(x_0) = 0$. Donde segue que x_0 é ponto crítico de Γ. Assim, pela Proposição 1.7, x_0 é um ponto de mínimo absoluto de Γ, pois Γ é estritamente convexa, pelo Corolário 2.1. Portanto, pela Proposição 1.8, para $x > x_0$, Γ é crescente e, para $x < x_0$, Γ é decrescente. $\square$

3 Função Beta

Como a função Gama de Euler, a função Beta de Euler também é uma função importante da Matemática. Nesta seção provaremos uma importante e conhecida relação que associa essas duas funções.

3.1 Definição e propriedades

Abaixo definimos a função Beta de Euler, também conhecida como integral de Euler do primeiro tipo.

Definição 3.1 (Função Beta de Euler)**.** *Considere $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. A função Beta de Euler é definida como*

$$B(x, y) = \int_0^1 (1 - s)^{x-1} s^{y-1} ds. \tag{3.1}$$

O próximo Teorema, provado na Subseção 2.2 de (CARDOSO, 2022), garante que a definição anterior está bem posta.

Teorema 3.1. *A Definição 3.1 está bem definida. Isto é, a integral*

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds \tag{3.2}$$

converge para todo $x, y > 0$.

Demonstração. Ver a Subseção 2.2 de (CARDOSO, 2022). □

Agora veremos algumas propriedades da função Beta. Essas propriedades são úteis para demonstrar a importante relação entre a função Gama e a função Beta que veremos no Lema 3.1.

Propriedade 3.1. *Para* $x, y > 0$,

$$B(x,y) = B(x,y+1) + B(x+1,y).$$

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} B(x,y+1) + B(x+1,y) &= \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^y ds + \int_0^1 (1-s)^x s^{y-1} ds \\ &= \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} \left(s + (1-s)\right) ds \\ &= \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds \\ &= B(x,y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B(x,y) = B(x,y+1) + B(x+1,y).$$

□

Propriedade 3.2. *Para* $x, y > 0$, *valem*

$$B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y) \quad \text{e} \quad B(x,y+1) = \left(\frac{y}{x+y}\right) B(x,y).$$

Demonstração. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned} B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y) &\Leftrightarrow (x+y)B(x+1,y) = xB(x,y) \\ &\Leftrightarrow x\left(B(x+1,y) - B(x,y)\right) = -yB(x+1,y) \end{aligned}$$

Como, pela propriedade 3.1, $B(x+1,y) - B(x,y) = -B(x,y+1)$, segue

$$\begin{aligned} B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right) B(x,y) &\Leftrightarrow x\left(B(x+1,y) - B(x,y)\right) = -yB(x+1,y) \\ &\Leftrightarrow -xB(x,y+1) = -yB(x+1,y) \\ &\Leftrightarrow xB(x,y+1) = yB(x+1,y). \end{aligned}$$

Além disso, note que, considerando a substituição

$$\begin{array}{cc} u = s^y & dv = x(1-s)^{x-1} ds \\ du = ys^{y-1} ds & v = -(1-s)^x, \end{array}$$

por integração por partes,

$$\begin{aligned} xB(x,y+1) &= \int_0^1 x(1-s)^{x-1}s^y ds \\ &= -s^y(1-s)^x\Big|_0^1 + y\int_0^1 (1-s)^x s^{y-1} ds \\ &= 0 + yB(x+1,y). \end{aligned}$$

Logo, $xB(x,y+1) = yB(x+1,y)$. Portanto, por equivalências, vale a igualdade

$$B(x+1,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right)B(x,y).$$

De modo análogo, mostra-se que

$$B(x,y+1) = \left(\frac{y}{x+y}\right)B(x,y).$$

□

Lema 3.1. *Seja* $z, w > 0$. *A igualdade*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

é válida.

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos: $z, w \geq 1$ e $z \in (0,1)$ ou $w \in (0,1)$.

1. $z, w \geq 1$: Por definição da função Gama, temos

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx \int_0^\infty e^{-y}y^{w-1}dy.$$

Defina $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-x}x^{z-1}$ e $g(y) = e^{-y}y^{w-1}$, respectivamente. Pelo Teorema 2.1, f e g são integráveis. Donde segue, pelo Teorema de Fubini, que a função $f \cdot g : [0,a] \times [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_0^a e^{-x}x^{z-1}dx \int_0^a e^{-y}y^{w-1}dy = \int_0^a \int_0^a e^{-(x+y)}x^{z-1}y^{w-1}dxdy. \qquad (3.3)$$

Vamos utilizar o Teorema de Mudança de Variáveis na integral acima. Considere a transformação $T(u,v) = (x,y)$ do plano uv no plano xy, onde

$$x = uv \quad \text{e} \quad y = u(1-v),$$

que leva uma região S_a do plano uv na região $R_a = [0,a] \times [0,a]$ do plano xy. Para determinar a região S_a, note que

$$u = x + y \quad \text{e} \quad v = \frac{x}{x+y}.$$

Donde segue que,

$$0 \leq u \leq 2a \quad \text{e} \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Temos que $S_a = [0, 2a] \times [0, 1]$ é a região do plano uv procurada. Como T é classe C^1 e o seu Jacobiano é não nulo, visto que,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u < 0, \quad \forall (u,v) \in (0, 2a) \times (0,1)$$

Além disso, $h(x,y) = (f \cdot g)(x,y) = e^{-(x+y)}x^{z-1}y^{w-1}$ é contínua sobre a região R_a, pois $z, w \geq 1$. Portanto, segue pelo Teorema da mudança de variáveis para integrais duplas, que

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a h(x,y)dydx &= \int_0^{2a} \int_0^1 h(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dvdu \\ &= \int_0^{2a} \int_0^1 e^{-u}(uv)^{z-1} \left[u(1-v)\right]^{w-1} |-u| dvdu. \end{aligned}$$

Mas por (3.3),

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-x}x^{z-1}dx \int_0^a e^{-y}y^{w-1}dy &= \int_0^{2a} \int_0^1 e^{-u}(uv)^{z-1} \left[u(1-v)\right]^{w-1} |-u| dvdu \\ &= \int_0^{2a} \int_0^1 e^{-u}u^{(z+w)-1}v^{z-1}(1-v)^{w-1}dvdu \end{aligned}$$

Então, passando o limite quando $a \to \infty$ na igualdade acima, por definição de integrais impróprias, segue que

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx \int_0^{\infty} e^{-y}y^{w-1}dy = \int_0^{\infty} \int_0^1 e^{-u}u^{(z+w)-1}v^{z-1}(1-v)^{w-1}dvdu.$$

Utilizando o Teorema de Fubini na integral da direita,

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{(z+w)-1}du \int_0^1 v^{z-1}(1-v)^{w-1}dv.$$

Portanto,

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z,w).$$

2. $z \in (0,1)$ ou $w \in (0,1)$: Sabemos que,

$$z, w \in (0,1) \Rightarrow z+1, w+1 \in (1,2).$$

Sendo assim, pelo caso anterior, temos

$$B(z+1, w+1) = \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(w+1)}{\Gamma(z+w+2)}$$

$$\Rightarrow B(z+1, w+1) = \left(\frac{zw}{(z+w+1)(z+w)}\right)\left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\right). \tag{3.4}$$

Mas, utilizando a propriedade 3.2, temos

$$\begin{aligned} B(z+1,w+1) &= \left(\frac{z}{z+(w+1)}\right)B(z,w+1) \\ &= \left(\frac{z}{z+(w+1)}\right)\left[\left(\frac{w}{z+w}\right)B(z,w)\right] \\ &= \left(\frac{zw}{(z+w+1)(z+w)}\right)B(z,w). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B(z+1,w+1) = \left(\frac{zw}{(z+w+1)(z+w)}\right)B(z,w). \tag{3.5}$$

Portanto, de (3.4) e (3.5), segue que

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \text{para } x \in (0,1) \text{ ou } w \in (0,1).$$

□

4 Símbolo de Pochhaammer

Uma das aplicações do símbolo de Pochhammer é a sua utilização em expressões que envolvem a n-ésima derivada de um polinômio. Veremos nesta seção que ele está relacionado com a função Gama. Além disso, a partir dele, definiremos a função Gama nos reais negativos não inteiros ($\mathbb{R}^-\backslash\mathbb{Z}^-$).

4.1 Definição e propriedades

Abaixo vemos a definição do símbolo de Pochhammer. Note que ela não inclui os inteiros negativos.

Definição 4.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$. O símbolo de Pochhammer é definido como*

$$(z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1).$$

O lema a seguir relaciona o símbolo de Pochhammer e a função Gama. Ele é útil para definir a função Gama nos reais negativos não inteiros. E, consequentemente, é útil na análise do comportamento da função Gama quando $z \to -n^{\pm}$, para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lema 4.1. *Para $z > 0$ vale a seguinte igualdade,*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. De fato, usaremos indução sobre n. Se $n = 1$, por definição, $(z)_1 = z$. Sendo assim, pela Propriedade 2.1, a igualdade

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{(z)_1}$$

é válida. Agora, suponhamos, por hipótese de indução, que a igualdade

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}$$

seja válida para algum $n > 1$. Vamos mostrar que ela também é verdadeira para $n+1$. Com efeito, pela Propriedade 2.1,

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)\Gamma(z+n).$$

Assim, por hipótese de indução,

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)\Gamma(z+n) = (z+n)\left((z)_n \Gamma(z)\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}}$$

pois $(z)_{n+1} = z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)$. Portanto,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Por meio da relação do lema anterior, podemos definir a função Gama para $z < 0$, com $z \notin \mathbb{Z}^-$. Antes de enunciarmos tal definição, note que dado $z < 0$, pode-se escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z + n_0 > 0$. Ademais, pelo Lema 4.1, temos que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n_0)}{(z)_{n_0}},$$

está bem definido. Afirmamos que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n_0)}{(z)_{n_0}} \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \forall n > n_0. \tag{4.1}$$

De fato, para $n = n_0$, temos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n_0)}{(z)_{n_0}},$$

por hipótese. Suponha, por hipótese de indução, que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n},$$

para algum $n > n_0$ (que implica $z + n > 0$). Daí, pela Propriedade 2.1 e por hipótese de indução, temos

$$\frac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}} = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{(z)_{n+1}} = \frac{(z+n)(z)_n\Gamma(z)}{(z)_{n+1}} = \frac{(z)_{n+1}\Gamma(z)}{(z)_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}}.$$

Por conseguinte,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \forall n > n_0.$$

Ou seja, o quociente

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}$$

independe de $n > -z$. Portanto, a definição a seguir está bem posta.

Definição 4.2. *Seja $z < 0$, com $z \notin \mathbb{Z}^-$. Definimos*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \textit{ com } n > -z.$$

Note que, pela definição anterior, a função Gama não está definida em $\mathbb{Z}^-$, pois o símbolo de Pochhammer não está definido em $\mathbb{Z}^-$. No entanto, podemos verificar que $\Gamma(z) \to \pm\infty$, quando $z \to -n^{\pm}$, para $n \in \mathbb{N}$.

De fato, seja $n \in \mathbb{Z}_+$. Sabemos, pelo Teorema 2.2, que a função Gama é contínua. Assim,

$$\lim_{z \to -n^+} \Gamma(z) = \lim_{z \to -n^+} \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}} = \lim_{z \to -n^+} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \infty.$$

De modo análogo, podemos verificar que

$$\lim_{z \to -n^-} \Gamma(z) = -\infty.$$

5 Função Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler é definida por uma série de potências e é conhecida por generalizar a função exponencial. Ainda, é importante no estudo do Cálculo Fracioário, como veremos mais adiante.

5.1 Definição e exemplos

Vejamos a definição da função de Mittag-Leffler a dois parâmetros.

Definição 5.1. *A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é definida por*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Quando $\beta = 1$, denotamos $E_\alpha(z) := E_{\alpha,1}(z)$.

O próximo Teorema, provado na Subseção 4.3 de (CARDOSO, 2022), garante que a definição anterior está bem definida.

Teorema 5.1. *A função de Mittag-Leffler definida na Definição 5.1 é convergente.*

Demonstração. Ver a Subseção 4.3 de (CARDOSO, 2022). □

Utilizando a Definição 5.1, seguem alguns casos particulares da função de Mittag-Leffler, dentre eles temos a função exponencial, para $\beta = \alpha = 1$:

1. $E_{1,1}(z) = e^z$: De fato,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\Rightarrow E_{1,1}(z) = e^z.$$

2. $E_{1,2}(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$: De fato,

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma((k+1)+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \\ &\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{zj!} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} - 1\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{1,2}(z) = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right).$$

3. $E_{1,3}(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$: De fato,

$$\begin{aligned} E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma((k+2)+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \\ &\overset{j=k+2}{=} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^{j-2}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{z^2 j!} - \frac{1}{z^2} - \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} - 1 - z\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{1,3}(z) = \frac{1}{z^2}\left(e^z - 1 - z\right).$$

4. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow E_{2,1}(z^2) = \cosh(z).$$

5. $E_{2,1}(z^2) = \dfrac{\sinh(z)}{z}$: De fato,

$$\begin{aligned} E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma((2k+1)+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{2,1}(z^2) = \frac{1}{z}\sinh(z).$$

6. $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$: De fato,

$$E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$
$$\Rightarrow E_{2,1}(-z^2) = \cos(z).$$

6 Operadores Fracionários

Agora, começamos o estudo do Cálculo Fracionário. Nas seções seguintes, enunciamos e provamos resultados do Cálculo Fracionário que são utilizados no artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), com base em (CARDOSO, 2017-2018). Mais precisamente, trazemos as definições dos operadores fracionários de Riemann-Liouville e de Caputo, alguns exemplos e, quando necessário, provamos alguns resultados envolvendo tais operadores.

6.1 Integral Fracionária de Riemann-Liouville

A seguir temos a definição da Integral Fracionária de Riemann-Liouville e em seguida trazemos algumas observações importantes.

Definição 6.1 (Integral Fracionária de Riemann-Liouville). *Dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $a, b \in I$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definimos as integrais fracionárias de Riemann-Liouville, $I^{\alpha}_{a^+}$ e $I^{\alpha}_{b^-}$, de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ por*

$$\left(I^{\alpha}_{a^+} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a, \alpha > 0 \tag{6.1}$$

e

$$\left(I^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < b, \alpha > 0, \tag{6.2}$$

onde $\left(I^{\alpha}_{a^+} f\right)(t)$ é chamado de integral de f à direita de a e $\left(I^{\alpha}_{b^-} f\right)(t)$ é chamado de integral de f à esquerda de b.

Vejamos algumas observações que envolvem a definição acima.

- Se $\alpha = 1$, então a integral fracionária de Riemann-Liouville coincide com a integral ordinária de Riemann, isto é,

$$\left(I^{1}_{a^+} f\right)(t) = \int_a^t f(s) ds \quad \text{e} \quad \left(I^{1}_{b^-} f\right)(t) = \int_t^b f(s) ds;$$

- Para $\alpha = 0$ convencionamos que

$$\left(I^{0}_{a^+} f\right)(t) = f(t) \quad \text{e} \quad \left(I^{0}_{b^-} f\right)(t) = f(t),$$

  ou seja, $(I^0_{a^+} f) = (I^0_{b^-} f)$ é o operador identidade. Essa convenção pode ser justificada através do limite, pois é possível mostrar que $I^{\alpha}_{a^+} f \to f$, quando $\alpha \to 0^+$, para cada $t \in [a, b]$, depende de "o quão boa" pode ser a f. Por exemplo, para $f \in C^1$, pode-se utilizar integração por partes (ver seção 2 de (SILVA, 2018-2019)).

- A integral fracionária de Riemann-Liouville é um operador linear, isto é, dados f e g funções e c uma constante arbitrária, segue que

$$(I^{\alpha}_{a^+}c(f+g)(t)) = c(I^{\alpha}_{a^+}f)(t) + c(I^{\alpha}_{a^+}g)(t).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(I^{\alpha}_{a^+}c(f+g)\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}c(f+g)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left(cf(s)+cg(s)\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left[(t-s)^{\alpha-1}cf(s)\right] + \left[(t-s)^{\alpha-1}cg(s)\right]ds \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds + \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds \\
&= c(I^{\alpha}_{a^+}f)(t) + c(I^{\alpha}_{a^+}g)(t).
\end{aligned}$$

Agora, para entendermos melhor a Definição 6.1, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 6.1. *Considere as funções potências*

$$\phi_1(t) = (t-a)^{\beta-1} \quad e \quad \phi_2(t) = (b-t)^{\beta-1},$$

com $\beta > 0$*. Vamos mostrar que*

$$\left(I^{\alpha}_{a^+}\phi_1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}$$

e

$$\left(I^{\alpha}_{b^-}\phi_2\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Demonstração. A priori, mostremos a igualdade envolvendo ϕ_1. Por (6.1), temos

$$(I^{\alpha}_{a^+}\phi_1) = \left(I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta-1}ds.$$

Considerando a substituição $s = a + \eta(t-a)$, obtemos $ds = (t-a)d\eta$, $(t-s) = (t-a)(1-\eta)$ e $(s-a) = \eta(t-a)$. Assim,

$$(I^{\alpha}_{a^+}\phi_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a)^{\alpha-1}(1-\eta)^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}(t-a)^{\beta-1}(t-a)d\eta.$$

Fazendo algumas manipulações no lado direito da igualdade acima, obtemos

$$(I^{\alpha}_{a^+}\phi_1) = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\eta)^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}d\eta.$$

Pela Definição 3.1, segue que

$$(I^{\alpha}_{a^+}\phi_1) = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta).$$

Ainda, vimos no Lema 3.1 que

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Logo,

$$\left(I^{\alpha}_{a^+}\phi_1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

Analogamente pode-se mostrar que

$$\left(I^{\alpha}_{b^-}\phi_2\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

□

6.2 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

A seguir temos a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville. Mais adiante veremos um exemplo que mostra que, diferentemente da derivada ordinária, a derivada fracionárai de Riemann-Liouville de uma constante é, em geral, não nula.

Definição 6.2 (Derivada Fracionária de Riemann-Liouville)**.** *Dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $a, b \in I$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definimos as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, $D^{\alpha}_{a^+}$ e $D^{\alpha}_{b^-}$, de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ por*

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a^+}f\right)(t), \quad t > a, \alpha > 0 \tag{6.3}$$

e

$$\left(D^{\alpha}_{b^-}f\right)(t) = (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{b^-}f\right)(t), \quad t < b, \alpha > 0, \tag{6.4}$$

onde

$$n = [\alpha] + 1 \quad \textit{se} \quad \alpha \notin \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad n = \alpha \quad \textit{se} \quad \alpha \in \mathbb{N}^*,$$

em que $[\alpha]$ representa o maior inteiro menor que α. Além disso, $\left(D^{\alpha}_{a^+}f\right)(t)$ é chamado de derivada de f à direita de a e $\left(D^{\alpha}_{b^-}f\right)(t)$ é chamado de derivada de f à esquerda de b.

Agora, veremos algumas observações importantes da Definição 6.2.

- Se $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, então a derivada fracionária de Riemann-Liouville coincide com a derivada ordinária, pois

  $$(D^{\alpha}_{a^+}f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^0_{a^+}f)(t) = f^{(n)}(t)$$

  e

  $$(D^{\alpha}_{b^-}f)(t) = (-1)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^0_{b^-}f)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t),$$

  visto que, convencionamos $(I^0_{a^+}f) = (I^0_{b^-}f)$ como o operador identidade.

- A derivada e fracionária de Riemann-Liouville é um operador linear, isto é, dados f e g funções e c uma constante arbitrária, segue que

$$(D^{\alpha}_{a^+}c(f+g)(t)) = c(D^{\alpha}_{a^+}f)(t) + c(D^{\alpha}_{a^+}g)(t).$$

  Com efeito, como a integral fracionária de Riemann-Liouville é um operador linear, temos

$$\begin{aligned}
\left(D^{\alpha}_{a^+}c(f+g)\right)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a^+}c(f+g)\right)(t) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(c\left(I^{n-\alpha}_{a^+}f\right)(t) + c\left(I^{n-\alpha}_{a^+}g\right)(t)\right) \\
&= c\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a^+}f\right)(t) + c\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a^+}g\right)(t) \\
&= c(D^{\alpha}_{a^+}f)(t) + c(D^{\alpha}_{a^+}g)(t).
\end{aligned}$$

Agora, para compreendermos melhor a Definição 6.2, veremos alguns exemplos do cálculo de derivadas fracionárias de Riemann-Liouville de algumas funções.

Exemplo 6.2. *Considere as funções potências*

$$\phi_1(t) = (t-a)^{\beta-1} \quad \textit{e} \quad \phi_2(t) = (b-t)^{\beta-1},$$

com $\beta > 0$. Mostraremos que

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}\phi_1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}$$

e

$$\left(D^{\alpha}_{b^-}\phi_2\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos a igualdade envolvendo a ϕ_1. Por definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville, temos

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}\phi_1\right)(t) = \left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^{\beta-1}\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a^+}(s-a)^{\beta-1}\right)(t).$$

Vimos que

$$\left(I^{n-\alpha}_{a^+}(s-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(t-a)^{n-\alpha+\beta-1}.$$

Logo,

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}.$$

Entretanto,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (\beta-\alpha+n-1)(\beta-\alpha+n-2)\cdots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= (\beta-\alpha)_n(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1},
\end{aligned}
$$

pois, pelo Lema 4.1, temos

$$(\beta-\alpha)_n = \frac{\Gamma(\beta-\alpha+n)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

Portanto,

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

De forma análoga mostra-se a igualdade envolvendo a ϕ_2. $\square$

O próximo exemplo mostra que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante é, em geral, não nula.

Exemplo 6.3. *Seja $\phi(t) = 1$. As derivadas fracionária de Riemann-Liouville de ϕ são dadas por*

$$(D^{\alpha}_{a^+}\phi)(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \textit{e} \quad (D^{\alpha}_{b^-}\phi)(t) = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Demonstração. Com efeito, basta tomar $\beta = 1$ e $\alpha > 0$ no exemplo anterior. $\square$

Exemplo 6.4. *Considere a função*

$$\phi(t) = (t-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}\left(\lambda(t-a)^{\mu}\right)$$

com $\beta, \mu > 0$. Mostraremos que, se $\beta-\alpha > 0$, então

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}\phi\right)(t) = (t-a)^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}\left(\lambda(t-a)^{\mu}\right).$$

Demonstração. Pela Definição 5.1,

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{a^+}\phi)(t) &= D^{\alpha}_{a^+}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t-a)^{\mu}]^k}{\Gamma(\mu k+\beta)}(t-a)^{\beta-1}\right) \\
&= D^{\alpha}_{a^+}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\beta)}(t-a)^{\mu k+\beta-1}\right).
\end{aligned}
$$

Pela leariedade do operador fracionário de Riemann-Liouville e pelo Exemplo 6.2, temos

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{a^+}\phi)(t) &= D^{\alpha}_{a^+}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\beta)}\frac{\Gamma(\mu k+\beta)}{\Gamma(\mu k+\beta-\alpha)}(t-a)^{\mu k+\beta-\alpha-1}\right). \\
&= (t-a)^{\beta-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t-a)^{\mu}]^k}{\Gamma(\mu k+\beta-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, novamente pela Definição 5.1, temos

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}\phi\right)(t) = (t-a)^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}\left(\lambda(t-a)^{\mu}\right).$$

$\square$

6.3 Derivada Fracionária de Caputo

A seguir temos a definição da derivada fracionária de Caputo. Mais adiante veremos um exemplo que mostra que, diferentemente da derivada fracionária de Riemann-Liouville, a derivada fracionária de Caputo de uma constante é nula.

Definição 6.3 (Derivada Fracionária de Caputo)**.** *Definimos a derivada fracionária de Caputo de ordem* $\alpha > 0$, *em um intervalo finito* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *por*

$$({}^C D^{\alpha}_{a^+}\varphi)(t) := \left[D^{\alpha}_{a^+} \left(\varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k \right) \right](t)$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{b^-}\varphi)(t) := \left[D^{\alpha}_{b^-} \left(\varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(b)}{k!}(b-s)^k \right) \right](t),$$

onde α *é a ordem de derivação,* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* C *serve apenas para distinguí-la da derivada fracionária de Riemann-Liouville. Além disso,*

$$n = [\alpha] + 1 \quad \textit{se} \quad \alpha \notin \mathbb{N} \quad \textit{e} \quad n = \alpha \quad \textit{se} \quad \alpha \in \mathbb{N}^*,$$

onde $[\alpha]$ *representa o maior inteiro menor que* α.

Abaixo seguem algumas consequências da definição anterior.

- Se $0 < \alpha < 1$, então $n = 1$. Assim,

$$({}^C D^{\alpha}_{a^+}\varphi)(t) = \left[D^{\alpha}_{a^+} \left(\varphi(s) - \varphi(a) \right) \right](t)$$

e

$$({}^C D^{\alpha}_{b^-}\varphi)(t) = \left[D^{\alpha}_{b^-} \left(\varphi(s) - \varphi(b) \right) \right](t);$$

- Se $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, então

$$({}^C D^{\alpha}_{a^+}\varphi)(t) = \varphi^{(n)}(t) \quad \text{e} \quad ({}^C D^{\alpha}_{b^-}\varphi)(t) = (-1)^n \varphi^{(n)}(t),$$

visto que

$$\begin{aligned}
({}^C D^{\alpha}_{a^+}\varphi)(t) &= \left[D^{n}_{a^+} \left(\varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k \right) \right](t) \\
&= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k \right)(t) \\
&= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \varphi(t) - \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k \right)}_{=0} \\
&= \varphi^n(t).
\end{aligned}$$

- Como a derivada fracionária de Riemann-Liouville, a derivada de Caputo também é um operador linear. De fato,
$$\left({}^C D_{a^+}^{\alpha} c(f+g)\right)(t) = \left[D_{a^+}^{\alpha}\left(c(f+g) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(c(f+g))^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right)\right](t)$$
Como $(c(f+g))^{(k)}(a) = (cf)^{(k)}(a) + (cg)^{(k)}(a)$, manipulando o lado direito da última igualdade e usando a linearidade da derivada fracionária de Riemann-Liouville, chegamos que
$$({}^C D_{a^+}^{\alpha} c(f+g)(t)) = c({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(t) + c({}^C D_{a^+}^{\alpha} g)(t).$$

Exemplo 6.5. *Considere as funções potências*
$$\phi_1(s) = (s-a)^{\beta-1} \quad \text{e} \quad \phi_2(s) = (b-s)^{\beta-1},$$
com $n-1 < \alpha \leq n \leq \beta$ e $\beta > \alpha$. Se $\beta > n$, vamos mostrar que
$$\left({}^C D_{a^+}^{\alpha}\phi_1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}$$
e
$$\left(D_{b^-}^{\alpha}\phi_2\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$
Também, se $\beta = n$, mostraremos que
$$\left({}^C D_{a^+}^{\alpha}\phi_1\right)(t) = 0$$
e
$$\left({}^C D_{b^-}^{\alpha}\phi_2\right)(t) = 0.$$

Demonstração. Pela Definição 6.3.
$$({}^C D_{a^+}^{\alpha}\phi_1)(t) = \left[D_{a^+}^{\alpha}\left((s-a)^{\beta-1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\phi_1^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right)\right](t), \tag{6.5}$$
onde,
$$\begin{cases} \phi_1^{(k)}(t) = (t-a)^{\beta-1}, \quad k=0 \\ \phi_1^{(k)}(t) = (\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-k)(t-a)^{\beta-k-1}, \quad k = 1,2,\cdots,n-1. \end{cases}$$
Assim,

- Se $\beta > n$, temos $\beta - 1 > n-1$. Além disso,
$$\beta - 1 > n-1 \Rightarrow (\beta-1)-k > (n-1)-k \geq (n-1)-(n-1) = 0,$$
pois $k \leq n-1$ Como $\beta - k - 1 > 0$, temos $\phi_1^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. Logo, por (6.5), a derivada fracionária de Caputo de ϕ_1 coincide com a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ϕ_1, isto é,
$$({}^C D_{a^+}^{\alpha}\phi_1)(t) = \left(D_{a^+}^{\alpha}(s-a)^{\beta-1}\right)(t),$$
Então, pelo Exemplo 6.2,
$$({}^C D_{a^+}^{\alpha}\phi_1)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

- Se $\beta = n$, então $\beta - k - 1 \geq 0$, pois $k \leq n-1$. Vamos dividir a prova em dois casos: $n = 1$ e $n > 1$. Se $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} ({}^C D^{\alpha}_{a^+}\phi_1)(t) &= \left(D^{\alpha}_{a^+} \left((s-a)^0 - \frac{\phi_1^{(0)}(a)}{0!}(s-a)^0 \right) \right)(t) \\ &= \left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^0 \right)(t) - \left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^0 \right)(t) = 0. \end{aligned}$$

Se $n > 1$,

$$\phi_1^{(k)}(a) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, 2, \cdots, n-2, \\ \\ (n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1)) = (n-1)!, & k = n-1. \end{cases}$$

Então, usando a leariedade da derivada fracionária de Riemann-Liouville,

$$\begin{aligned} ({}^C D^{\alpha}_{a^+}\phi_1)(t) &= \left(D^{\alpha}_{a^+} \left((s-a)^{n-1} - \frac{(n-1)!}{(n-1)!}(s-a)^{n-1} \right) \right)(t) \\ &= \left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^{n-1} \right)(t) - \left(D^{\alpha}_{a^+}(s-a)^{n-1} \right)(t) = 0. \end{aligned}$$

□

O exemplo seguinte mostra que a derivada de Caputo de uma constante é nula.

Exemplo 6.6. *Se c é uma constante, então*

$$({}^C D^{\alpha}_{a^+} c) = 0.$$

Demonstração. De fato, tomando $\beta = 2$ no Exemplo 6.5 e $s = c + a$, temos que $\phi_1(c+a) = ((c+a)-a)^1 = c$ e

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a^+}\phi_1\right)(c+a) = \left({}^C D^{\alpha}_{a^+} c\right) = 0.$$

□

O lema a seguir aborda a derivada de Caputo do produto da função de Mittag-Leffler com uma função potência.

Lema 6.1. *Sejam $n-1 < \alpha < n$, $0 \leq j \leq n-1$, com $n, j \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

$$({}^C D^{\alpha}_{0^+} s^j E_{\alpha,j+1}(\lambda s^{\alpha}))(t) = \lambda t^j E_{\alpha,j+1}(\lambda t^{\alpha}).$$

Demonstração. Defina

$$\Psi(s) = s^j E_{\alpha,j+1}(\lambda s^{\alpha}).$$

Aplicando a definição da derivada de Caputo na função acima, temos

$$({}^C D^{\alpha}_{0^+}\Psi(s))(t) = \left(D^{\alpha}_{0^+} \left(\Psi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Psi^{(k)}(0)}{k!} s^k \right) \right)(t).$$

Pela linearidade da derivada de Riemann-Liouville,

$$({}^C D_{0+}^{\alpha}\Psi(s))(t) = \left(D_{0+}^{\alpha}\Psi(s)\right)(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Psi^{(k)}(0)}{k!}\left(D_{0+}^{\alpha}s^k\right)(t). \tag{6.6}$$

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\Psi(s) &= s^j E_{\alpha,j+1}(\lambda s^{\alpha})\\ &= s^j\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda s^{\alpha})^m}{\Gamma(\alpha m + j + 1)}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m s^{\alpha m + j}}{\Gamma(\alpha m + j + 1)}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Psi^{(k)}(s) &= \frac{d^k}{ds^k}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m s^{\alpha m + j}}{\Gamma(\alpha m + j + 1)}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\frac{(\alpha m + j)\cdots(\alpha m + j - (k-1))s^{\alpha m + j - k}}{\Gamma(\alpha m + j + 1)}.\end{aligned}$$

Lembre que, $n-1 < \alpha < n$ e $k \leq n-1$. Daí,

$$\alpha m + j - k > (n-1)m + j - (n-1) = (n-1)(m-1) + j.$$

Logo, se $m \geq 1$, então $\alpha m + j - k > 0$, donde segue que

$$s^{\alpha m - k + j}\Big|_{s=0} = 0.$$

Assim, da expressão de $\Psi^{(k)}(s)$, temos

$$\Psi^{(k)}(0) = \frac{d^k}{ds^k}\frac{s^j}{j!}\Big|_{s=0} = \left(\frac{j\cdots(j-k+1)s^{j-k}}{j!}\right)$$

$$\Rightarrow \Psi^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \neq j\\ 1, & k = j\end{cases}$$

Portanto, pelo Exemplo 6.2,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Psi^{(k)}(0)}{k!}\left(D_{0+}^{\alpha}s^k\right) &= \frac{1}{j!}D_{0+}^{\alpha}s^j\\ &= \frac{1}{j!}\left(\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}s^{j-\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Psi^{(k)}(0)}{k!}\left(D_{0+}^{\alpha}s^k\right) = \frac{s^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}. \tag{6.7}$$

Por outro lado, utilizando o Exemplo 6.4 com $a = 0$, $\mu = \alpha$ e $\beta = j + 1$, temos

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0^+}\Psi(s) &= s^{j-\alpha}E_{\alpha,j+1-\alpha}(\lambda s^{\alpha}) \\ &= s^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+j+1)} \\ &= \frac{s^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + s^j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k s^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha(k-1)+j+1)}. \end{aligned}$$

Fazendo $l = k - 1$ no somatório da direita,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0^+}\Psi(s) &= \frac{s^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + s^j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l+1} s^{\alpha l}}{\Gamma(\alpha l+j+1)}. \\ &= \frac{s^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} + \lambda s^j E_{\alpha,j+1}(\lambda s^{\alpha}). \end{aligned}$$

Substituindo o resultado encontrado acima e (6.7) em (6.6), obtemos a identidade

$$({}^C D^{\alpha}_{0^+} s^j E_{\alpha,j+1}(\lambda s^{\alpha}))(t) = \lambda t^j E_{\alpha,j+1}(\lambda t^{\alpha}).$$

□

7 Estudo do artigo: Uma nota sobre a equação de Logística Fracionária

A equação de logística fracionária é uma equação não linear bastante conhecida no caso clássico. No artigo (AREA; LOSADA; NIETO, 2016) é utilizada a derivada fracionária de Caputo na equação de logística.

O objetivo desse artigo é mostrar, por meio de uma prova por absurdo, que a solução proposta no artigo (WEST, 2015) para a equação de logística fracionária não é uma solução exata para tal equação. Para alcançar esse objetivo, os autores utilizam resultados do Cálculo Fracionário vistos e provados nas seções anteriores.

7.1 Equação de Logística Ordinária

A equação de logística ordinária é uma equação não linear muito utilizada em problemas de Biologia, por exemplo, problemas envolvendo crescimento populacional. Além disso, ela admite solução explícita obtida pelo método de separação de variáveis.

Definição 7.1. *A equação de logística ordinária é definida por*

$$u'(t) = ku(t)(1 - u(t)), \quad t \geq 0. \tag{7.1}$$

A solução para a equação (7.1) é dada por

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-kt}}, \quad t \geq 0, \tag{7.2}$$

onde $u(0) = u_0$. De fato, podemos obter essa solução utilizando o método de separação de variáveis, como veremos a seguir. Manipulando a equação (7.1) e integrando, obtemos

$$\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \int k dt + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = kt + c_1.$$

Aplicando a função exponencial na igualdade acima, obtemos

$$\frac{u}{1-u} = \pm e^{c_1} e^{kt}.$$

Denotando $c = \pm e^{c_1}$,

$$\frac{u}{1-u} = ce^{kt}.$$

Utilizando a condição inicial $u(0) = u_0$ na igualdade acima, encontramos que $c = \frac{u_0}{1-u_0}$. Assim,

$$\frac{u}{1-u} = \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right) e^{kt}.$$

Agora basta isolarmos u na igualdade acima,

$$u = \frac{u_0 e^{kt}}{(1-u_0) + u_0 e^{kt}} = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-kt}}.$$

Portanto,

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-kt}}, \quad t \geq 0.$$

Note que, se $\left|\frac{u_0-1}{u_0 e^{nkt}}\right| < 1$, a função acima é a soma da seguinte série

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_1(-nkt)\right], \tag{7.3}$$

onde $E_1(-nkt) := e^{-nkt}$. De fato,

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-kt}} = \frac{u_0 e^{kt}}{u_0 e^{kt} - (u_0 - 1)} = \frac{1}{1 - \frac{u_0-1}{u_0 e^{kt}}}.$$

Mas se $\left|\frac{u_0-1}{u_0 e^{nkt}}\right| < 1$, a útima igualdade é a soma de uma série geométrica. Ou seja,

$$u(t) = \frac{1}{1 - \frac{u_0-1}{u_0 e^{kt}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0-1}{u_0 e^{kt}}\right)^n$$

Logo,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n e^{-nkt} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_1(-nkt)\right].$$

7.2 Equação de Logística Fracionária

Abaixo enunciamos a definição da Equação de logística fracionária, utilizando a derivada fracionária de Caputo.

Definição 7.2. *A equação de logística fracionária é definida por*

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = k^{\alpha}u(t)(1-u(t)), \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{7.4}$$

O artigo (WEST, 2015), motivado pelo cálculo de (7.3), sugere que

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_{\alpha}(-nk^{\alpha}t^{\alpha})\right], \quad t \geq 0 \tag{7.5}$$

pode ser uma solução de (7.4).

Agora, mostraremos uma sequência de resultados para demonstrar, por meio de uma prova por absurdo, que (7.5) não é uma solução de (7.4). Além da exposição dos resultados de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), as suas provas foram detalhadas e analisadas. No caso da Proposição 2.3, a sua demonstração foi corrigida e no caso do Lema 2.1 trouxemos uma breve discussão sobre uma etapa de sua demonstração.

O Lema e as Proposições a seguir são referentes ao Lema 2.1, a Proposição 2.2 e a Proposição 2.3 de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), respectivamente.

Lema 7.1. *Se a função dada por* (7.4) *é uma solução exata da equação de logística fracionária* (7.1) *de ordem* α; $0 < \alpha < 1$*, então para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *temos que*

$$(n+1)E_{\alpha}(-nk^{\alpha}s^{\alpha}) = \sum_{j=0}^{n} E_{\alpha}(-(n-j)k^{\alpha}t^{\alpha})E_{\alpha}(-jk^{\alpha}t^{\alpha}). \tag{7.6}$$

Discussão da demonstração.

Seja

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_{\alpha}(-nk^{\alpha}t^{\alpha})\right].$$

Fazendo $n' = 1$, $j = 0$ e $\lambda = -nk^{\alpha}$ no Lema 6.1, temos

$$^{C}D^{\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_{\alpha}(-nk^{\alpha}s^{\alpha})\right](t) = -k^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n nE_{\alpha}(-nk^{\alpha}t^{\alpha}). \tag{7.7}$$

Além disso,

$$u(t)(1-u(t)) \;\; = \;\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_{\alpha}(-nk^{\alpha}t^{\alpha})\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n E_{\alpha}(-nk^{\alpha}t^{\alpha})\right).$$

Definindo

$$a_j = \left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^j E_{\alpha}(-jk^{\alpha}s^{\alpha}), \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e lembrando que, pela definição vista em 1.1,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j},$$

temos

$$\begin{aligned} u(t)(1-u(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n - \sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}\right). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j} &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{j} E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha)\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n-j} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n} E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$u(t)(1-u(t)) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n}\left(E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) - \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)\right). \tag{7.8}$$

Como, por hipótese, $u(t)$ é solução de (7.4), substituindo (7.7) e (7.8) em (7.4), obtemos

$$-k^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n} nE_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) =$$
$$k^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^{n}\left(E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) - \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)\right)$$

Neste ponto, o artigo afirma que da igualdade acima, pode-se concluir que

$$(n+1)E_\alpha(-nk^\alpha t^\alpha) = \sum_{j=0}^{n} E_\alpha(-(n-j)k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha).$$

Mas, em geral, essa conclusão não é válida, por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{6\cdot 2^n} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

são séries com soma iguais e termos gerais distintos.

Esse resultado seria verdadeiro se pudéssemos aplicar os teoremas de igualdades de séries de potências. No entanto, para usá-los, deve-se supor que a igualdade vale, para todo u_0 em algum intervalo. Porém, a condição inicial está fixa e isso nos dá a igualdade de uma série numérica, onde a implicação não vale. De fato, se, por exemplo, tomamos $u_0 = 2$ e as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por $a_0 = 1, a_1 = 2, b_0 = 2, b_1 = 0,$ e $a_n = b_n = 1,$ para $n \geq 2$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n b_n = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ou seja, a implicação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u_0-1}{u_0}\right)^n b_n \Rightarrow a_n = b_n.$$

falha. Visto que, a primeira igualdade vale sem que a segunda seja verdadeira.

Uma solução é considerar $u_0 \mapsto u(u_0, t)$, dada pela série (7.5), analítica na primeira variável em um intervalo J em $(1, \infty)$. Desse modo, estaríamos considerando $u_0 > 1$ como uma variável. Assim, ao invés de supor, por contradição, que para u_0, condição inicial fixa, (7.5) é solução de (7.4), supomos, por contradição, que para todo u_0 variando em J, (7.5) é solução de (7.4). Considerando o comentário acima e que os resultados seguintes do artigo estão corretos ou foram corrigidos por nós, o seu resultado principal fica da seguinte maneira.

Teorema 7.1. *Dado $u_0 > 1$, considere um intervalo $J \subset (1, \infty)$, contendo u_0, para o qual a aplicação $u_0 \mapsto u(u_0, t)$, dada pela série* (7.5)*, é analítica na primeira variável. Então, nem toda solução de* (7.4) *com condição inicial em J é da forma* (7.5)*. Ou seja, existe $\bar{u}_0 \in J$, tal que* (7.5) *não é solução de* (7.4) *com condição inicial em $\bar{u}_0$.*

Talvez poderíamos concluir do resultado acima que

"toda solução de (7.4) com condição inicial em J não é da forma (7.5)".

Para prová-lo, pensamos no seguinte raciocínio, ainda sem conclusão. Suponha, por contradição, que existe $u_0^* \in J$, tal que (7.4) com condição inicial em u_0^* é da forma (7.5). Defina o conjunto

$$J' = \{\bar{u}_0 > 1/\text{(7.5) não é solução de (7.4) com condição inicial em } \bar{u}_0\}.$$

Afirmamos que J' é denso em J. De fato, dado $u_0' > 1$ em J, existe $J_{u_0'} \subset (1, \infty)$, contendo u_0', para o qual $u_0' \mapsto u(u_0', t)$, dada pela série (7.5), é analítica na primeira variável mas, existe $\bar{u}_0 \in J_{u_0'}$, tal que (7.5) não é solução de (7.4) com condição inicial em $\bar{u}_0$, ou seja, $\bar{u}_0 \in J'$. De outra forma, dado $u_0' \in J$, existe uma vizinhança $J_{u_0'}$ de u_0' tal que $J_{u_0'} \cap J' \neq \emptyset$. Assim, mostramos o seguinte resultado.

Teorema 7.2. *O conjunto das condições iniciais*

$$J' = \{\bar{u}_0 > 1/\text{(7.5) não é solução de (7.4) com condição inicial em } \bar{u}_0\}$$

é denso em $(1, \infty)$.

A próxima Proposição é referente a Proposição 2.2 de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016).

Proposição 7.1. *Nas hipóteses do Lema 7.1, temos*

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha). \tag{7.9}$$

Demonstração. Fazendo $n = 2$ em (7.6), obtemos

$$\begin{aligned}
3E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) &= \sum_{j=0}^{2} E_\alpha\left(-(2-j)k^\alpha t^\alpha\right) E_\alpha(-jk^\alpha t^\alpha) \\
&= E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha)\cdot 1 + E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(k^\alpha t^\alpha) + 1\cdot E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) \\
&= 2E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) + E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(k^\alpha t^\alpha) \\
&\Rightarrow E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha).
\end{aligned}$$

□

Na Proposição 2.3 de (AREA; LOSADA; NIETO, 2016), detectamos que houve uma falha em sua demonstração. Mais precisamente, esse equívoco está na seguinte afirmação: se $0 < \alpha < 1$, então

$$4\Gamma(\alpha+1)^2 > 4\Gamma(1)^2 = 4.$$

Tendo em vista que,

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow 1 < \alpha + 1 < 2.$$

Além disso, pelo Corolário 2.2, existe $x_0 \in (1,2)$, tal que Γ é crescente a direita de x_0 e descrescente a esquerda de x_0. Assim,

$$x_0 \in (1, \alpha+1), x_0 \in (\alpha+1, 2) \text{ ou } x_0 = \alpha + 1 \in (1,2).$$

Donde segue que,

- $x_0 \in (1, \alpha+1):$
$$\begin{aligned} & x_0 < \alpha+1 < 2 \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < \Gamma(2) \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < 1 \end{aligned}$$
- $x_0 \in (\alpha+1, 2):$
$$\begin{aligned} & 1 < \alpha+1 < x_0 \\ \Rightarrow\ & \Gamma(1) > \Gamma(\alpha+1) \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < 1 \end{aligned}$$
- $x_0 = \alpha+1 \in (1,2):$
$$\begin{aligned} & \alpha+1 < 2 \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < \Gamma(2) \\ \Rightarrow\ & \Gamma(\alpha+1) < 1 \end{aligned}$$

Portanto, dos itens acima podemos concluir que

$$\Gamma(\alpha+1) < 1 \Rightarrow 4\Gamma(\alpha+1)^2 < 4, \tag{7.10}$$

com a desigualdade invertida, comparando com o que é apresentado em (AREA; LOSADA; NIETO, 2016). Corrigimos essa demonstração utilizando as Propriedades 2.1 e 3.2 das funções Gama e Beta, respectivamente. Para tal finalidade, percebemos que, se $0 < \alpha < 1$ e a igualdade

$$\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

é válida, então $\alpha B(\alpha,\alpha) = 1$. Uma contradição, uma vez que, para $\alpha \in (0,1)$, temos que $\alpha B(\alpha,\alpha) > 1$.

Proposição 7.2. *A identidade* (7.9) *da proposição 7.1 é válida se e somente se* $\alpha = 1$.

Demonstração. Pela Definição 5.1,

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad t \geq 0. \tag{7.11}$$

Por outro lado,

$$E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\right). \tag{7.12}$$

Ainda, segue da Definição 1.1 que

$$\begin{aligned}
E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+1)} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^{n-j}}{\Gamma((n-j)\alpha+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-k^\alpha t^\alpha)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-n}}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Então, podemos reescrever (7.12) como

$$E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n b_n \tag{7.13}$$

onde

$$b_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-n}}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((n-j)\alpha+1)}. \tag{7.14}$$

Sendo assim, de (7.11) e (7.13), segue que

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n b_n, \tag{7.15}$$

com b_n dado em (7.14).

Vamos mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2k^\alpha t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2k^\alpha t^\alpha)^n b_n \Leftrightarrow \alpha = 1$$

e concluiremos que a identidade (7.9) da proposição 7.1 é válida se e somente se $\alpha = 1$. Com efeito,

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2k^{\alpha}t^{\alpha})^n}{\Gamma(n\alpha+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2k^{\alpha}t^{\alpha})^n b_n,$$

com b_n dado em (7.14). Então, por igualdade de séries de potências, os coeficientes das séries acima devem ser iguais, isto é,

$$b_n=\frac{1}{\Gamma(n\alpha+1)}. \tag{7.16}$$

Em particular, para o caso $n=2$, devemos ter que

$$b_2=\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

Observando que,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2}\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{\Gamma(\alpha j+1)\Gamma((2-j)\alpha+1)}=\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(1)}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\right),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\right)&=\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}\\
\Rightarrow\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2}&=\frac{1}{2}. \qquad (7.17)
\end{aligned}$$

Afirmamos que se a igualdade (7.17) é válida então $\alpha=1$. Com efeito, de (7.17), temos as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{4\Gamma(\alpha+1)^2}=\frac{1}{2}\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{2\alpha\Gamma(2\alpha)}{4\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow\quad\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}=1\\
&\Leftrightarrow\quad\Gamma(2\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1). \qquad (7.18)
\end{aligned}$$

Suponha que $\Gamma(2\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)$ e $\alpha\in(0,1)$. Note que, pelas propriedades 2.1 e 3.2 das funções Gama e Beta, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)&=\Gamma(2\alpha+1)B(\alpha,\alpha+1)\\
&=2\alpha\Gamma(2\alpha)\left(\frac{\alpha}{2\alpha}B(\alpha,\alpha)\right)\\
&=\alpha\Gamma(2\alpha)B(\alpha,\alpha).
\end{aligned}$$

Logo, de (7.18), chegamos que

$$\alpha B(\alpha, \alpha) = 1. \tag{7.19}$$

No entanto, $\alpha B(\alpha, \alpha) > 1$. De fato, veja que

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 0$$

e

$$0 < s < 1 \Rightarrow -1 < -s < 0 \Rightarrow 0 < 1 - s < 1$$

Ainda,

$$-1 < \alpha - 1 < 0 \quad \text{e} \quad 0 < 1 - s < 1$$
$$\Rightarrow (1-s)^{\alpha-1} > (1-s)^0 = 1.$$

Daí, como $s^{\alpha-1} > 0$, temos

$$\alpha s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} > \alpha s^{\alpha-1}.$$

Logo,

$$\alpha B(\alpha, \alpha) = \alpha \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} ds > \alpha \int_0^1 s^{\alpha-1} ds = 1.$$
$$\Rightarrow \alpha B(\alpha, \alpha) > 1.$$

Contradição! Pois, por (7.19), $\alpha B(\alpha, \alpha) = 1$. Portanto, se a identidade (7.9) é válida, então $\alpha = 1$.

$(\Leftarrow)$ Supondo $\alpha = 1$, vamos mostrar que

$$E_\alpha(-2k^\alpha t^\alpha) = E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha)E_\alpha(-k^\alpha t^\alpha).$$

Vimos que, para $\alpha = 1$, a função de Mittag-Leffler coincide com a função exponencial. Assim,

$$e^{-2kt} = e^{-kt}e^{-kt} \Rightarrow E_1(-2kt) = E_1(-kt)E_1(-kt).$$

$\square$

Referências

AREA, I.; LOSADA, J.; NIETO, J. J. **A note on the fractional logistic equation**. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 444, p. 182–187, 2016. 4, 5, 11, 13, 14, 54, 63, 65, 68

ARTIN, E. ***The Gamma Function.*** *Holt, Rinehart and Winson*. [S.l.]: Inc, 1964. 4, 13, 18, 31

CARDOSO, D. S. **O Cálculo Fracionário e as Edo's Fracionárias**. *Relatório Final - PIBIC-UFS*, 2017–2018. 4, 17, 54

CARDOSO, D. S. **Introdução ao cálculo fracionário e aplicações às equações diferenciais fracionárias**. *TCC (Graduação) - Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe*, São Cristóvão, 2022. 46, 47, 52

EIDAM, J. C. ***Integrais Impróprias***. [S.l.]: Universidade Federal do Paraná, 2020. 4, 18, 21, 22

FORYŚ, U.; MARCINIAK-CZOCHRA, A. **Logistic equations in tumour growth modelling**. *AMCS*, University of Zielona Góra Press, v. 13, p. 317–325, 2003. 3

LIMA, E. L. ***Análise Real:*** *Funções de n Variáveis*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 2. 18

LIMA, E. L. ***Análise Real:*** *Funções de Uma Variável*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1. 4, 6, 7, 18, 19, 20, 27, 33

MILLER, K. S.; ROSS, B. ***An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations***. [S.l.]: Wiley, 1993. 3

OLIVEIRA, O. R. B. de. ***Derivação sob o sinal de integração:*** *- Integrais oscilatórias e transformadas*. [S.l.]: IME-USP, 2015. 4, 6, 18, 20, 23, 24, 26

SBMAC. *II Simpósio Brasileiro de Cálculo Fracionário*. 2022. Disponível em: <https://sites.google.com/view/bsfc2022>. Acesso em 09 de julho de 2022. 3

SHEN, C. Y. **Logistic growth modelling of COVID-19 proliferation in China and its international implications**. *International Journal of Infectious Diseases*, Elsevier, v. 96, p. 582–589, 2020. 3

SILVA, B. M. O. da. **O Cálculo Fracionário e Equação da Onda Fracionária**. *Relatório Final - PIBIC-UFS*, 2018–2019. 54

VALENTIM, C. A. et al. **Can fractional calculus help improve tumor growth models?** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 379, p. 112964, 2020. 3

WEST, B. J. **Exact solution to fractional logistic equation**. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 429, p. 103–108, 2015. 4, 5, 63, 65

ZORICH, V. A. ***Mathematical Analysis II***. [S.l.]: Springer, 2004. 40